Dynamique de population :
problème de transmission avec diffusion généralisée

Alexandre Thorel

Résumé

On étudie un problème de transmission, en dynamique de population, posé dans un ouvert Ω de la forme :

$$\Omega :=]a, b[\times \omega, \quad \text{avec} \quad \Omega := \Omega_- \cup \Gamma \cup \Omega_+,$$

où $\Omega_- :=]a, \gamma[\times \omega$, $\Gamma := \{\gamma\} \times \omega$ et $\Omega_+ :=]\gamma, b[\times \omega$ avec $\gamma \in]a, b[\subset \mathbb{R}$ et $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Dans chacun des habitats, on considère qu'une population se disperse selon une équation de diffusion généralisée modélisée par

$$k\Delta^2 u - l\Delta u = f.$$

La nouveauté ici est que les constantes réelles k et l peuvent être négatives. Le terme biharmonique modélise la dispersion induite par des interactions à longues portées alors que le laplacien ne modélise que la dispersion locale (voir J.D. Murray [4]). Les techniques utilisées sont liées aux équations différentielles opérationnelles : sommes d'opérateurs linéaires, puissances fractionnaires d'opérateurs, théorie des semi-groupes et de l'interpola-tion (voir M. Haase [2], G. Dore & A. Venni [1] et H. Triebel [5]). Ainsi, on traduit les équations de (P) en équations opérationnelles d'ordre 4, à valeurs dans l'espace de Banach $X := L^p(\omega)$, $p \in]1, +\infty[$. En posant $(u(x))(y) := u(x, y)$ avec $x \in]a, b[$, $y \in \omega$ et Δ_y comme étant le laplacien en dimension $n-1$, on définit $Au(x) := \Delta_y u(x)$ et $D(A)$ le domaine de A qui dépend des conditions aux bords considérées. Ainsi, on obtient

$$\begin{array}{l}
(EQ)\left\{\begin{array}{lcl}
u_-^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_-}{k_-} I)u_-''(x) + (A^2 - \frac{l_-}{k_-} A)u_-(x) & = & f_-(x), \quad \text{pour p. p. } x \in]a, \gamma[\\
u_+^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_+}{k_+} I)u_+''(x) + (A^2 - \frac{l_+}{k_+} A)u_+(x) & = & f_+(x), \quad \text{pour p. p. } x \in]\gamma, b[,
\end{array}\right. \\
(CB)\left\{\begin{array}{lclclcl}
u_-(a) & = & \varphi_1^-, & u_+(b) & = & \varphi_1^+, \\
u_-'(a) & = & \varphi_2^-, & u_+'(b) & = & \varphi_2^+,
\end{array}\right. \\
(CT)\left\{\begin{array}{lcl}
u_-(\gamma) & = & u_+(\gamma) \\
u_-'(\gamma) & = & u_+'(\gamma) \\
k_+u_+^{(3)}(\gamma) + k_+Au_+'(\gamma) - l_+u_+'(\gamma) & = & k_-u_-^{(3)}(\gamma) + k_-Au_-'(\gamma) - l_-u_-'(\gamma) \\
k_+u_+''(\gamma) + k_+Au_+(\gamma) & = & k_-u_-''(\gamma) + k_-Au_-(\gamma).
\end{array}\right.
\end{array} \tag{P}$$

On utilise les résultats de [3] et [6], pour montrer que, sous de bonnes hypothèses sur les données du problème (P), on peut construire des solutions

$$u_- \in W^{4,p}(a, \gamma; X) \cap L^p(a, \gamma; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_+ \in W^{4,p}(\gamma, b; X) \cap L^p(\gamma, b; D(A^2))$$

vérifiant les conditions aux limites du problème (P). Enfin, on inverse un déterminant opérateur pour montrer qu'il existe un unique couple (u_-, u_+) qui vérifie les conditions de transmission, fournissant ainsi l'unique solution du problème (P) ayant la régularité attendue. Si A est un opérateur linéaire plus général, sous certaines hypothèses sur A, ce résultat reste vrai.

Références

[1] G. Dore & A. Venni, *On the Closedness of the Sum of Two Closed Operator*, Math. Z., 196, 1987, pp. 189-201.

[2] M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Birkhauser, 2006.

[3] R. Labbas, S. Maingot, D. Manceau & A. Thorel, *On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain*, J. Math. Anal. Appl., 450, 2017, pp. 351-376.

[4] J.D. Murray, *Mathematical Biology II : Spatial Models & Biomedical Applications*, Springer, 2003.

[5] H. Triebel, *Interpolation theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland publishing company Amsterdam New York Oxford, 1978.

[6] R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot, A. Thorel, *Generalized linear models for population dynamics in two juxtaposed habitats*, Dis. Cont. Dyn. Syst. - A, Vol 39, No 5, 2019, pp. 2933-2960.