Sur les familles 3-intersectantes du groupe symétrique (en collaboration avec R. Maleki, A.T. Rasoamanana et A.S. Razafimahatratra)

Angelot Behajaina (LMNO)

06 Novembre 2020

Théorème d'Erdös-Ko-Rado

En combinatoire extrémale, on a le célèbre

Théorème (Erdös-Ko-Rado,1961)

Soient n et k des entiers positifs tels que $n \geq 2k$. Si $\mathcal{F}$ est une famille de k-parties de $[n] := \{1, 2 \ldots, n\}$ vérifiant $A \cap B \neq \varnothing$ pour tous $A, B \in \mathcal{F}$, alors $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

- **La borne est optimale** : Pour $i \in [n]$, la famille $\mathcal{F}_i$ de toutes les k-parties contenant i.
- Il y a des analogues du théorème d'EKR pour d'autres structures : familles de sous-espaces vectoriels sur les corps finis, familles de permutations du groupe symétrique, ...

Dans cet exposé, on s'intéresse aux permutations du **groupe symétrique**.
Soient n et t deux entiers positifs tels que $n \geq t$.

Définition

Une famille $\mathcal{F} \subset \mathrm{Sym}(n)$ est dite t-intersectante si pour tous $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$ il existe une t-partie S de $[n]$ telle que $\sigma(S) = \tau(S)$.

Exemple

$n = 8$, $t = 4$ et $\mathcal{F} = \{(1,2)(3,4), (3,4)(5,6), (5,6)(7,8)\}$.

Michel Deza et Peter Frankl ont montré :

Théorème (Deza,Frankl,1977)

Soit $n \geq 1$. Si $\mathcal{F}$ est une famille 1-intersectante de $\mathrm{Sym}(n)$, alors $|\mathcal{F}| \leq (n-1)!$.

David Ellis a formulé la

Conjecture (Ellis,2012)

Si $\mathcal{F} \subset \mathrm{Sym}(n)$ est une famille t-intersectante, alors $|\mathcal{F}| \leq t!(n-t)!$.

-La borne est optimale : il suffit de considérer une famille $\mathcal{F}$ de toutes les permutations fixant globalement une t-partie fixé S. Dans ce cas $\mathcal{F}$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Sym}(t) \times \mathrm{Sym}(n-t)$.
-La conjecture est vraie asymptotiquement :

Théorème (Ellis,2012)

Soit $t \geq 1$. Il existe $n_0(t)$ assez grand tel que si $n \geq n_0(t)$, alors pour toute famille t-intersectante $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Sym}(n)$, alors $|\mathcal{F}| \leq t!(n-t)!$.

Conjecture d'Ellis - Théorème principal

Karen Meagher et A.S. Razafimahatratra ont montré :

Théorème (Meagher,Razafimahatratra,2020)

Soit $n \geq 2$. Si $\mathcal{F}$ est une famille 2-intersectante de $\mathrm{Sym}(n)$, alors $|\mathcal{F}| \leq 2!(n-2)!$.

Notre travail traite le cas $t = 3$:

Théorème (B., R. Maleki, A.T. Rasoamanana, A.S. Razafimahatratra)

Soit $n \geq 11$. Si $\mathcal{F}$ est une famille 3-intersectante de $\mathrm{Sym}(n)$, alors $|\mathcal{F}| \leq 6(n-3)!$.

Outils : Théorie des graphes et représentations des groupes symétriques.

Soient $t \leq n$ deux entiers. Une permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ est dite *t-dérangement* si σ ne fixe globalement aucune t-partie de $[n]$.

Exemples

- $t = 3$, $n = 4$. *La permutation* $\sigma = (1, 2)(3, 4)$ *est un* 3*-dérangement.*
- $t = 3$, $n = 4$. *La transposition* $(2, 3)$ *n'est pas un* 3*-dérangement car elle laisse invariant* $\{1, 2, 3\}$*.*

On définit

$$D_{n,t} = \{\sigma \in \mathrm{Sym}(n) | \sigma \text{ est un } \ t - \text{dérangement}\}.$$

Le *t-graphe de dérangements* de $\mathrm{Sym}(n)$ est $\Gamma_{n,t} = \mathrm{Cay}\left(\mathrm{Sym}(n), D_{n,t}\right)$:

- l'ensemble des sommets est $\mathrm{Sym}(n)$,
- $\sigma \sim \tau$ (σ et τ sont adjacents) si $\sigma^{-1}\tau \in D_{n,t}$.

-Une famille $\mathcal{F} \subset \mathrm{Sym}(n)$ est t-intersectante si et seulement si $\mathcal{F}$ est un stable (les éléments de $\mathcal{F}$ sont deux à deux non adjacents) de $\Gamma_{n,t}$. En effet, $\mathcal{F}$ est t-intersectante si et seulement si pour tous $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$, il existe une t-partie S telle que $\sigma(S) = \tau(S)$ (ou encore $\sigma^{-1}\tau(S) = S$), c'est-à-dire $\sigma^{-1}\tau \notin D_{n,t}$.
-En notant $\alpha(\Gamma_{n,t}) = \max\{|S| | S \text{ est un stable de } \Gamma_{n,t}\}$ le nombre de stabilité de $\Gamma_{n,t}$, la conjecture d'Ellis équivaut à $\alpha(\Gamma_{n,t}) \leq t!(n-t)!$.

Théorème

Il existe une correspondance bijective explicite entre les partitions λ de n et les caractères irréductibles χ^λ de $\mathrm{Sym}(n)$.

Lemme

Soit $(\omega_i)_{i=1,\dots,k} \subset \mathbb{R}$ et soient $C_1, C_2, \dots, C_k$ des classes de conjugaison distinctes de $\mathrm{Sym}(n)$. Notons $A = \sum_{i=1}^k \omega_i A_i$ où A_i désigne la matrice d'adjacence de $\mathrm{Cay}(\mathrm{Sym}(n), C_i)$. Alors :

- *Le nombre de stabilité de $\Gamma_{n,t}$ vérifie : $\alpha(\Gamma_{n,t}) \leq \frac{n!}{1-\frac{d}{\tau}}$, où τ la plus petite valeur propre de A et d est la somme d'une ligne de A.*
- *Les valeurs propres de A sont de la forme*

$$\xi_{\chi^\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^k \omega_i |C_i| \chi^\lambda(C_i)}{\chi^\lambda(id)}, \lambda \vdash n.$$

Pour montrer le théorème principal, il suffit de bien choisir les C_i et les ω_i pour avoir $d = \binom{n}{3} - 1$ et $\tau = -1$. Dans ce cas, on a $n!\,(1 - d/\tau)^{-1} = 3!(n-3)!$.

Choix des C_i et ω_i pour $n \geq 27$ impair

-Les cas $11 \leq n \leq 26$ sont vérifiés sur Sagemath. Pour $n \geq 27$, on distingue suivant la parité. Dans cet exposé, on se limite au cas n impair.
-Avec l'aide de Sagemath, on constate que les classes de conjugaison suivantes peuvent convenir : $C_1 = C_{(n)}$, $C_2 = C_{(n-2,1^2)}$, $C_3 = C_{(n-2,2)}$, $C_4 = C_{(n-5,4,1)}$ et $C_5 = C_{(n-1,1)}$.
-A partir de ces C_i, on peut trouver ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 et ω_5 tels que :

1. $\xi_{\chi^{[n]}} = \binom{n}{3} - 1$ (cela entraîne forcément que $d = \binom{n}{3} - 1$),
2. $\xi_{\chi^{[n-1,1]}} = \xi_{\chi^{[n-2,2]}} = \xi_{\chi^{[n-3,3]}} = -1$,
3. et les autres valeurs propres sont dans $]-1, \binom{n}{3} - 1[$.

A partir de ces trois conditions, on déduit que $\tau = -1$.

Merci pour votre attention