Sur la dimension fractale d'attracteurs exponentiels dans des réseaux de réaction-diffusion

Guillaume Cantin - *Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre*

Journée de la Fédération Normandie-Mathématiques, 6 novembre 2020

Introduction

Figure 1 – Espèces en compétition.

On considère un modèle d'espèces en compétition :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \alpha_1 u - \beta_1 u^2 - \gamma_1 uv, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + \alpha_2 v - \beta_2 v^2 - \gamma_2 uv, \end{cases}$$

dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné à bord régulier.

Modèle d'espèces en compétition

Figure 1 – Espèces en compétition.

On considère un modèle d'espèces en compétition :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \alpha_1 u - \beta_1 u^2 - \gamma_1 uv, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + \alpha_2 v - \beta_2 v^2 - \gamma_2 uv, \end{cases}$$

dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné à bord régulier.

Dynamiques possibles :

- domination d'une des espèces,
- coexistence des espèces,
- cycles, hétérogénéité...

Fragmentation de l’habitat

On suppose que l’habitat des espèces u et v est *fragmenté* :

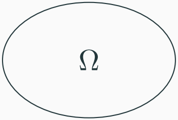
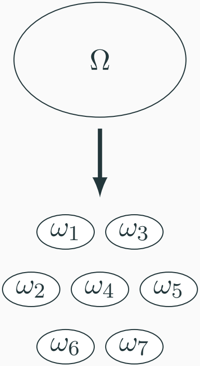


Figure 2 – Conséquences de la déforestation.

Fragmentation de l'habitat

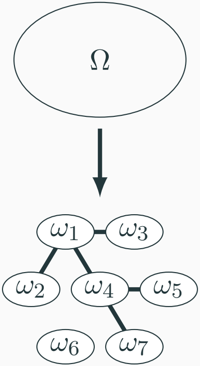
On suppose que l'habitat des espèces u et v est *fragmenté* :

Figure 2 – Conséquences de la déforestation.



On suppose que l'habitat des espèces u et v est *fragmenté* :

Figure 2 – Conséquences de la déforestation.



On modélise la dynamique de l'habitat fragmenté en construisant un **réseau de systèmes de réaction-diffusion**.

Réseau de systèmes de réaction-diffusion

On considère un système de réaction-diffusion de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + \varphi(u) & \text{dans } \omega \times (0,\, \infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0,\, \infty), \\ u(x,\, 0) = u_0(x) & \text{dans } \omega, \end{cases}$$

où $u = (u_1,\, \ldots,\, u_m)^T$ est définie dans $\omega \times (0,\, \infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; D est une matrice diagonale de taille m à coefficients strictement positifs ; φ est un opérateur non-linéaire ; u_0 est une condition initiale donnée.

On considère de plus un graphe $\mathscr{G} = \left(\mathscr{N},\, \mathscr{E}\right)$ composé de n sommets.

Réseau de systèmes de réaction-diffusion

On construit un réseau complexe d'instances non-identiques du système précédent en posant :

$$(\mathscr{R}) \begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = D_j \Delta u_j + \varphi_j(u_j) + g_j(u_1, \ldots, u_n) & \text{dans } \omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, \infty), \\ u_j(x, 0) = u_{j,0}(x) & \text{dans } \omega, \end{cases}$$

pour $1 \leq j \leq n$, où $u_j = (u_{1,j}, \ldots, u_{m,j})^T$ est définie dans $\omega \times (0, +\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Remarque : on suppose ici que $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n$.

Opérateur de couplage

L'opérateur de couplage g est construit en correspondance avec le graphe $\mathscr{G}$. On définit une matrice de connectivité $L = \left(L_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ en posant

$$L_{j,k} = +1 \text{ si } (k,\, j) \in \mathscr{E} \text{ avec } k \neq j, \quad L_{k,k} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} L_{j,k},$$

et une matrice des forces de couplage

$$H = \mathrm{diag}\big(\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_m\big).$$

On pose alors

$$g_j(u) = \sum_{k=1}^{n} L_{j,k} H u_k, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Les questions que l'on se pose

- Quelle est la dynamique du réseau ? Existe-t-il de « nouvelles » dynamiques ?
- Existe-t-il des conditions dans lesquelles tous les nœuds du réseau ont la même dynamique ?
- Peut-on décrire ces dynamiques en étudiant les ensembles attracteurs du système ?
- Peut-on trouver des conditions pour garantir la survie de toutes les espèces ?

Autres applications :

- réseaux de neurones,
- réseaux épidémiologiques complexes,
- modèles de méta-populations,
- oscillateurs couplés, réactions chimiques couplées...

Plan de l’exposé

Plan de l'exposé

- Attracteurs exponentiels de dimension fractale finie

Plan de l'exposé

- Attracteurs exponentiels de dimension fractale finie
- Estimation de la dimension pour un réseau de réaction-diffusion

Plan de l'exposé

- Attracteurs exponentiels de dimension fractale finie
- Estimation de la dimension pour un réseau de réaction-diffusion
- Influence de la topologie du réseau

Plan de l'exposé

- Attracteurs exponentiels de dimension fractale finie
- Estimation de la dimension pour un réseau de réaction-diffusion
- Influence de la topologie du réseau
- Synchronisation

Plan de l'exposé

- Attracteurs exponentiels de dimension fractale finie
- Estimation de la dimension pour un réseau de réaction-diffusion
- Influence de la topologie du réseau
- Synchronisation
- Simulations numériques

Attracteurs exponentiels de dimension fractale finie

Attracteurs exponentiels

Soit X un espace de Banach et $\big(S(t),\, \Phi,\, X\big)$ un système dynamique continu dont l'espace de phase Φ est compact. Alors $\big(S(t),\, \Phi,\, X\big)$ admet un unique attracteur global

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{t \geq 0} S(t)\Phi.$$

Attracteurs exponentiels

Soit X un espace de Banach et $\big(S(t),\, \Phi,\, X\big)$ un système dynamique continu dont l'espace de phase Φ est compact. Alors $\big(S(t),\, \Phi,\, X\big)$ admet un unique attracteur global

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{t \geq 0} S(t)\Phi.$$

Un sous-ensemble $\mathfrak{M} \subset \Phi$ est appelé *attracteur exponentiel* de $\big(S(t),\, \Phi,\, X\big)$ s'il est positivement invariant, compact, s'il contient $\mathfrak{A}$, et s'il attire les parties bornées de Φ à une vitesse exponentielle pour la pseudo-distance de Haussdorff ρ_H définie par :

$$\rho_H(A,\, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_X \,.$$

Dimension fractale

Puisque $\mathfrak{M}$ est compact, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir $\mathfrak{M}$ par un nombre fini de boules fermées de rayon ε. Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de telles boules de rayon ε qui recouvrent $\mathfrak{M}$. Alors la dimension fractale de $\mathfrak{M}$ est définie par

$$d_F(\mathfrak{M}) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}.$$

On peut estimer la dimension fractale de $\mathfrak{M}$ en utilisant le théorème de Eden, Foias, Nicolaenko & Temam.

▶ Théorème (Eden, Foias, Nicolaenko, Temam)

On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\|S(t)u - S(s)v\|_X \leq C\big(\,|t-s| + \|u-v\|_X\,\big),$$

pour tous $t > 0, s > 0, u, v \in \Phi$. *On suppose de plus qu'il existe* $t^* > 0$, $\delta^* \in \left]0,\, \frac{1}{8}\right[$ *et une projection orthogonale* P^* *de rang* N^* *tels que*

$$\|S(t^*)u - S(t^*)v\|_X \leq \delta^* \, \|u-v\|_X$$

ou $\big\|(Id - P^*)\big(S(t^*)u - S(t^*)v\big)\big\|_X \leq \big\|P\big(S(t^*)u - S(t^*)v\big)\big\|_X$

pour tous $u,\, v \in \Phi$. *Alors* $\big(S(t),\, \Phi,\, X\big)$ *admet un attracteur exponentiel* $\mathfrak{M}$ *tel que*

$$d_F(\mathfrak{M}) \leq 1 + N^* \max\left[1,\, \frac{\log\left(1 + \frac{2L^*}{\delta^*}\right)}{\log\left(\frac{1}{4\delta^*}\right)}\right],$$

où L^* *désigne la constante de Lipschitz de* $S(t^*)$ *sur* Φ.

Estimation de la dimension pour un réseau de réaction-diffusion

Formulation abstraite

On résout le problème $(\mathscr{R})$ dans $X = \big(L^2(\omega)\big)^{nm}$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, on considère l'opérateur

$$A_j = \mathsf{diag}\big[A_{1,j}, \ldots, A_{m,j}\big],$$

où $A_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, est la réalisation de $-D_{i,j}\Delta u_{i,j} + u_{i,j}$ dans $L^2(\Omega)$, avec condition de Neumann sur $\partial\Omega$. On pose ensuite $A = \mathsf{diag}\big[A_i, 1 \leq i \leq n\big]$ et on réécrit le problème $(\mathscr{R})$:

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(u) + g(u), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec $u_0 \in X$ et $f(u) = \big(u_1 + \varphi_1(u_1), \ldots, u_n + \varphi_n(u_n)\big)^T$.

Hypothèse de dissipativité

▶ Théorème

Soit $u(t,\, u_0)$ *la solution du réseau de réaction-diffusion* $(\mathscr{P})$ *issue de* $u_0 \in X$*. On suppose qu'il existe* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\delta > 0$ *tels que*

$$\|u(t,\, u_0)\|_X \leq C_1 e^{-\delta t} \|u_0\|_X + C_2, \quad 0 < t \leq T_{u_0}.$$

Alors le problème réseau $(\mathscr{P})$ *engendre un système dynamique* $(S(t),\, \Phi,\, X)$ *défini dans* X*, dont l'espace de phase* Φ *est compact et borné dans* $\mathcal{D}(A)$*. De plus,* $(S(t),\, \Phi,\, X)$ *admet une famille d'attracteurs exponentiels.*

Estimation de $d_F(\mathfrak{M})$

▶ Théorème (Cantin & Aziz-Alaoui, 2020)

La dimension fractale de $\mathfrak{M}$ *vérifie*

$$d_F(\mathfrak{M}) \leq 1 + C\,|\omega|\,\big(C^*\big)^{-d/2}.$$

avec

$$C^* = \frac{1 - \exp\Big\{ - C_A^2\big[C_g + C_f\,(1 + 2C_{A,\eta}C_\Phi)\,\big]\Big\}}{C_A^2\big[C_g + C_f\,(1 + 2C_{A,\eta}C_\Phi)\,\big]^2},$$

où $C_f > 0$, $C_g > 0$, $C_\Phi > 0$, $C_A > 0$, $C_{A,\eta} > 0$. *Le coefficient* $C_{A,\eta}$ *dépend seulement de* A *et* $\eta \in]\frac{3}{4}, 1[$. *Si* $C_g \to +\infty$, *alors*

$$d_F(\mathfrak{M}) \leq 1 + C\,|\omega|\,\big(C_g\big)^{d/2},$$

avec $C > 0$.

Remarques

- La constante C_g est la constante de Lipschitz de l'opérateur de couplage g, et dépend de la nature des couplages dans le réseau et de la topologie du réseau.

Remarques

- La constante C_g est la constante de Lipschitz de l'opérateur de couplage g, et dépend de la nature des couplages dans le réseau et de la topologie du réseau.

- On peut estimer C_g dans certains cas de topologies.

Remarques

- La constante C_g est la constante de Lipschitz de l'opérateur de couplage g, et dépend de la nature des couplages dans le réseau et de la topologie du réseau.
- On peut estimer C_g dans certains cas de topologies.
- La constante C_Φ dépend de l'espace de phase Φ, qui peut être « élargi » par l'opérateur de couplage g.

Remarques

- La constante C_g est la constante de Lipschitz de l'opérateur de couplage g, et dépend de la nature des couplages dans le réseau et de la topologie du réseau.
- On peut estimer C_g dans certains cas de topologies.
- La constante C_Φ dépend de l'espace de phase Φ, qui peut être « élargi » par l'opérateur de couplage g.
- On peut contrôler C_Φ en recherchant une région invariante ou une borne L^∞ uniforme en g.

Idées de démonstration

- **Étape 1.** On estime la constante de Lipschitz L^* et on choisit t^*. On considère une base de X composée de vecteurs propres de l'opérateur A :

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \geq 1,$$

avec $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \to +\infty$. On a alors :

$$\mathsf{Lip}_\Phi\big(S(t)\big) \leq \exp\left\{\left[C_g + C_f\left(1 + 2C_{A,\eta}C_\Phi\right)\right]t\right\}.$$

On pose $t^* = \dfrac{1}{C_g + C_f\left(1 + 2C_{A,\eta}C_\Phi\right)}$, d'où

$$L^* = \mathsf{Lip}_\Phi\big(S(t^*)\big) \leq e.$$

Idées de démonstration

- **Étape 2.** Estimation de δ^*. On pose

$$C^* = \frac{1 - \exp\Big\{ - C_A^2 \big[C_g + C_f \left(1 + 2 C_{A,\eta} C_\Phi \right) \big] \Big\}}{C_A^2 \big[C_g + C_f \left(1 + 2 C_{A,\eta} C_\Phi \right) \big]^2},$$

ce qui garantit que $\delta^* \leq \exp\left\{ -\frac{C^*}{2} \lambda_{N^*+1} + 1 \right\}$.

Idées de démonstration

- **Étape 2.** Estimation de δ^*. On pose

$$C^* = \frac{1 - \exp\Big\{ - C_A^2 \big[C_g + C_f \left(1 + 2C_{A,\eta} C_\Phi\right) \big] \Big\}}{C_A^2 \big[C_g + C_f \left(1 + 2C_{A,\eta} C_\Phi\right) \big]^2},$$

ce qui garantit que $\delta^* \leq \exp\left\{ -\frac{C^*}{2} \lambda_{N^*+1} + 1 \right\}$.

- **Étape 3.** On choisit N^* tel que $\lambda_{N^*+1} > \frac{2(1+\log 8)}{C^*}$. On sait que

$$\lambda_{N^*+1} = C \left(\frac{N^*}{|\omega|} \right)^{2/d},$$

donc on choisit $C > 0$ tel que $N^* = C\,|\omega| \left[\frac{2(1+\log 8)}{C^*} \right]^{d/2}$.

Influence de la topologie du réseau

Influence de la topologie du réseau

⇝ **Cas général.**

▶ Proposition

Soit $\sigma_{\max} = \max(\sigma_i,\ 1 \leq i \leq m)$. *Alors*

$$C_g \leq n(n-1)\sigma_{\max},$$

⇝ **Cas particuliers.**

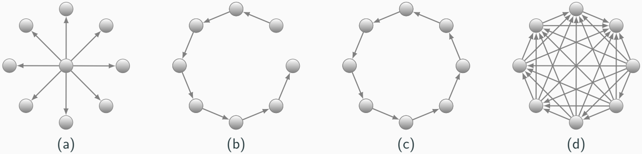


Figure 3 – (a) Étoile. (b) Chaîne. (c) Cycle. (d) Graphe complet.

Influence de la topologie du réseau

▶ Proposition

Si le graphe $\mathscr{G}$ est une chaîne orientée, un cycle orienté ou une étoile orientée de l'extérieur vers l'intérieur, alors

$$C_g \leq 2\sigma_{\max}.$$

Si le graphe $\mathscr{G}$ est une étoile orientée de l'intérieur vers l'extérieur, alors

$$C_g \leq \sigma_{\max}\sqrt{n^2 - n - 2}.$$

Synchronisation

Synchronisation

▶ Théorème

On suppose que le graphe $\mathscr{G}$ *est complet. Alors pour tout* $u_0 \in \Phi$, *la solution* $u(t, u_0)$ *du problème réseau* $(\mathscr{P})$ *synchronise, c'est-à-dire*

$$\|u_j(t) - u_k(t)\|_{L^2(\Omega)^m} \to 0 \text{ quand } t \to +\infty,$$

pour tous $j, k \in \{1, \dots, n\}$, *à condition que*

$$n\,\sigma_i > \tilde{C}_f,$$

pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

Simulations numériques

Quatre scenarios

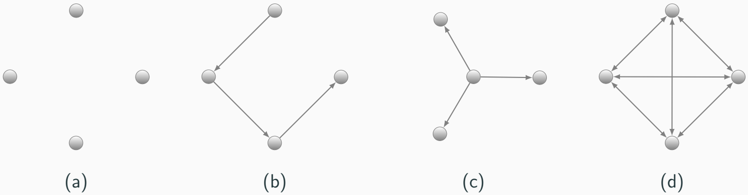


Figure 4 – Quatre topologies pour un modèle d'espèces en compétition en réseau. (a) Absence de couplage. (b) Chaîne orientée. (c) Étoile. (d) Graphe complet.

Dynamique du réseau en l'absence de couplage

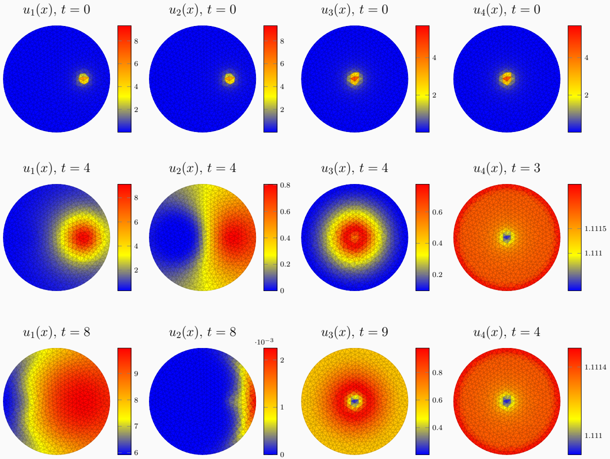


Figure 5 – Dynamique du réseau en l'absence de couplage.

Dynamique du réseau dans le cas d'une chaîne orientée

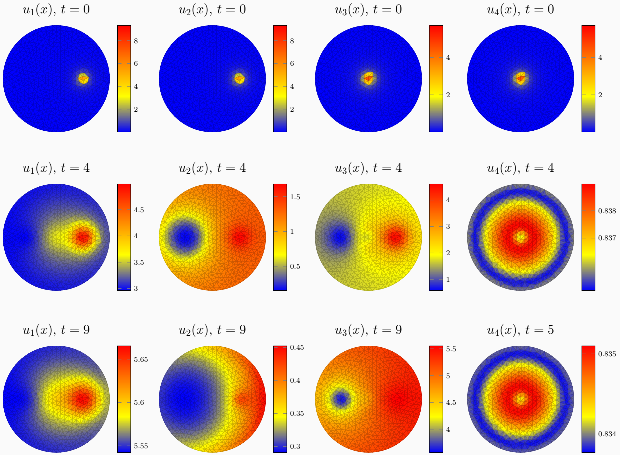


Figure 6 – Dynamique du réseau dans le cas d'une chaîne (4) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3).

Dynamique du réseau dans le cas d'une étoile

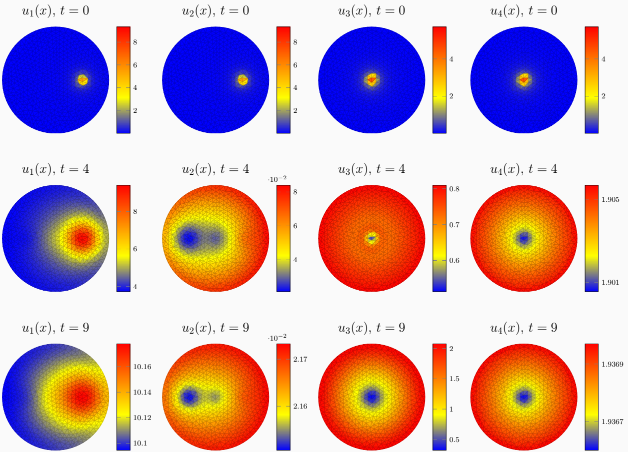


Figure 7 – Dynamique du réseau dans le cas d'une étoile centrée en (4).

Synchronisation dans le cas d'un graphe complet

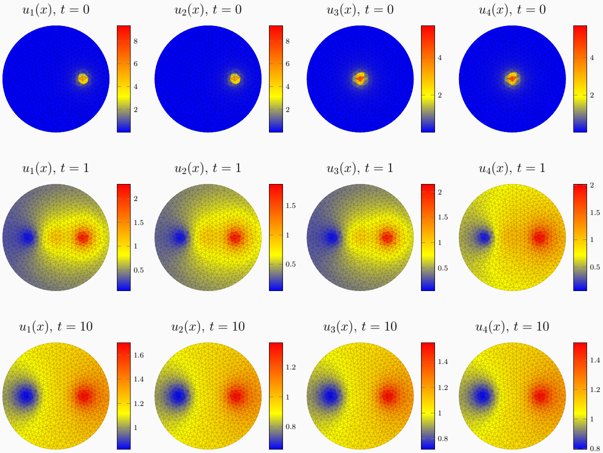


Figure 8 – Synchronisation dans le cas d'un graphe complet.

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Dimension estimate of attractors for complex networks of reaction-diffusion systems applied to an ecological model.
G. Cantin & M.A. Aziz-Alaoui, to appear in *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2020.

Conclusion et perspectives

Dimension estimate of attractors for complex networks of reaction-diffusion systems applied to an ecological model.
G. Cantin & M.A. Aziz-Alaoui, to appear in *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2020.

Quelques travaux en cours :

- estimations de la dimension des attracteurs exponentiels par borne inférieure ;
- étude de réseaux avec des domaines ω_i distincts ;
- étude de réseaux construits à partir d'autres problèmes paraboliques et avec d'autres couplages.

Conclusion et perspectives

Dimension estimate of attractors for complex networks of reaction-diffusion systems applied to an ecological model.
G. Cantin & M.A. Aziz-Alaoui, to appear in *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2020.

Quelques travaux en cours :

- estimations de la dimension des attracteurs exponentiels par borne inférieure ;
- étude de réseaux avec des domaines ω_i distincts ;
- étude de réseaux construits à partir d'autres problèmes paraboliques et avec d'autres couplages.

Merci de votre attention !