

RÉGULARITÉ DES FONCTIONS D'OPÉRATEURS

Clément Coine
LMNO, Université de Caen Normandie

12ème journée de la Fédération Normandie-Mathématiques

6 novembre 2020

Certains résultats sont le fruit d'une collaboration avec :

- Christian Le Merdy (LMB, Besançon)
- Anna Skripka (Université du Nouveau-Mexique)
- Fedor Sukochev (UNSW Sidney)

Question générale :

Étant donné un opérateur $A : X \rightarrow X$ sur un espace de Banach X (dans la suite, $X = \text{Hilbert}$) et f une fonction définie sur $\Omega \supset \sigma(A)$, comment définir

$$f(A) ?$$

Quelles sont les propriétés de l'application

$$A \mapsto f(A) ?$$

(e.g. continuité, différentiabilité...)

Objets en jeu :

- *Calcul fonctionnel* : en général, on définit $f(A)$ pour f "gentille" (par exemple f polynomiale) puis on étend par densité grâce à des inégalités du type

$$\|f(A)\| \leq C \sup_{t \in \Omega} |f(t)|,$$

Objets en jeu :

- *Calcul fonctionnel* : en général, on définit $f(A)$ pour f "gentille" (par exemple f polynomiale) puis on étend par densité grâce à des inégalités du type

$$\|f(A)\| \leq C \sup_{t \in \Omega} |f(t)|,$$

puis par continuité, on entend des inégalités du type

$$\|f(A) - f(B)\| \leq K \|f\| \|A - B\|.$$

Objets en jeu :

- *Calcul fonctionnel* : en général, on définit $f(A)$ pour f "gentille" (par exemple f polynomiale) puis on étend par densité grâce à des inégalités du type

$$\|f(A)\| \leq C \sup_{t \in \Omega} |f(t)|,$$

puis par continuité, on entend des inégalités du type

$$\|f(A) - f(B)\| \leq K \|f\| \|A - B\|.$$

↪ On se place dans le cas où $X = \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert (séparable). On peut alors définir, pour f mesurable bornée sur $\sigma(A)$ avec A opérateur normal (A commute avec son adjoint A^*), un opérateur $f(A)$:

$$\int_{\sigma(A)} f(x) dE^A(x).$$

- *Multiplicateurs de Schur* : Applications linéaires définies sur un espace de matrices, du type

$$[a_{ij}] \mapsto [m_{ij}a_{ij}] = [m_{ij}] \circ [a_{ij}]$$

pour une famille $[m_{ij}]$ fixée.

Applications en analyse harmonique, théorie de la perturbation...

- *Multiplicateurs de Schur* : Applications linéaires définie sur un espace de matrices, du type

$$[a_{ij}] \mapsto [m_{ij}a_{ij}] = [m_{ij}] \circ [a_{ij}]$$

pour une famille $[m_{ij}]$ fixée.

Applications en analyse harmonique, théorie de la perturbation...

- *Multiplicateurs de Schur multilinéaires* : applications bilinéaires (ou n -linéaires)

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \mapsto \left[\sum_j m_{ijk} a_{ij} b_{jk} \right]_{i,k}$$

- *Multiplicateurs de Schur* : Applications linéaires définie sur un espace de matrices, du type

$$[a_{ij}] \mapsto [m_{ij} a_{ij}] = [m_{ij}] \circ [a_{ij}]$$

pour une famille $[m_{ij}]$ fixée.

Applications en analyse harmonique, théorie de la perturbation...

- *Multiplicateurs de Schur multilinéaires* : applications bilinéaires (ou n -linéaires)

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \mapsto \left[\sum_j m_{ijk} a_{ij} b_{jk} \right]_{i,k}$$

- *Opérateurs intégraux multiples* : généralisation "continue" des multiplicateurs de Schur (multilinéaires).

Objet central en *analyse non-commutative*.

Quelle norme choisir pour les opérateurs ?

- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ensemble des opérateurs continus de \mathcal{H} dans \mathcal{H}) muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Quelle norme choisir pour les opérateurs ?

- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ensemble des opérateurs continus de \mathcal{H} dans \mathcal{H}) muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

- Soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts sur \mathcal{H} . On définit, pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{S}^p(\mathcal{H}) = \{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \mid \|T\|_p = \text{tr}(|T|^p)^{1/p} < \infty \}$.

Quelle norme choisir pour les opérateurs ?

- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ensemble des opérateurs continus de \mathcal{H} dans \mathcal{H}) muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

- Soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts sur \mathcal{H} . On définit, pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{S}^p(\mathcal{H}) = \{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \mid \|T\|_p = \text{tr}(|T|^p)^{1/p} < \infty \}$.

$$T \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \left(\sum_n \lambda_n(T)^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

où les $\lambda_n(T)$ sont les valeurs singulières de T .

Quelle norme choisir pour les opérateurs ?

- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ensemble des opérateurs continus de \mathcal{H} dans \mathcal{H}) muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

- Soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts sur \mathcal{H} . On définit, pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{S}^p(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \mid \|T\|_p = \text{tr}(|T|^p)^{1/p} < \infty\}$.

$$T \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \left(\sum_n \lambda_n(T)^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

où les $\lambda_n(T)$ sont les valeurs singulières de T .

Alors $(\mathcal{S}^p(\mathcal{H}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach : c'est la classe de Schatten d'ordre p , aussi appelé parfois espace ℓ_p non-commutatif.

Cas particulier d'espace L_p non-commutatif.

Fonctions d'opérateurs

Soient $N \in \mathbb{N}$, $A = A^*$, $B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. Alors

$$A = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^N \mu_j Q_j$$

où les λ_k et μ_j sont les valeurs propres de A , B et P_k et Q_j sont les projections orthogonales sur l'espace vectoriel engendré par le vecteur propre associé.

Fonctions d'opérateurs

Soient $N \in \mathbb{N}$, $A = A^*$, $B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. Alors

$$A = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^N \mu_j Q_j$$

où les λ_k et μ_j sont les valeurs propres de A , B et P_k et Q_j sont les projections orthogonales sur l'espace vectoriel engendré par le vecteur propre associé.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On a

$$f(A) - f(B) = \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) P_k - \sum_{j=1}^N f(\mu_j) Q_j$$

Fonctions d'opérateurs

Soient $N \in \mathbb{N}$, $A = A^*$, $B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. Alors

$$A = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^N \mu_j Q_j$$

où les λ_k et μ_j sont les valeurs propres de A , B et P_k et Q_j sont les projections orthogonales sur l'espace vectoriel engendré par le vecteur propre associé.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(A) - f(B) &= \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) P_k - \sum_{j=1}^N f(\mu_j) Q_j \\ &= \sum_{k,j=1}^N \frac{f(\lambda_k) - f(\mu_j)}{\lambda_k - \mu_j} \underbrace{P_k (A - B) Q_j}_{X_{k,j}} \end{aligned}$$

Fonctions d'opérateurs

Soient $N \in \mathbb{N}$, $A = A^*$, $B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. Alors

$$A = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^N \mu_j Q_j$$

où les λ_k et μ_j sont les valeurs propres de A , B et P_k et Q_j sont les projections orthogonales sur l'espace vectoriel engendré par le vecteur propre associé.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(A) - f(B) &= \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) P_k - \sum_{j=1}^N f(\mu_j) Q_j \\ &= \sum_{k,j=1}^N \frac{f(\lambda_k) - f(\mu_j)}{\lambda_k - \mu_j} \underbrace{P_k (A - B) Q_j}_{X_{k,j}} \\ &= [f^{[1]}(\lambda_k, \mu_j)]_{k,j} \circ (A - B) \end{aligned}$$

Dimension finie : suite et fin

THÉORÈME

Soient $N \in \mathbb{N}$, $A = A^*$, $B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. On suppose que $A = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable. Alors $t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tB)$ est dérivable et sa dérivée en 0 vaut

$$[f^{[1]}(\alpha_i, \alpha_j)b_{i,j}]_{i,j} = [f^{[1]}(\alpha_i, \alpha_j)]_{i,j} \circ B$$

où $f^{[1]}(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{f(\alpha_i) - f(\alpha_j)}{\alpha_i - \alpha_j}$, $i \neq j$, et $f^{[1]}(\alpha_i, \alpha_i) = f'(\alpha_i)$.

En dimension infinie : Soient A et B des opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

En dimension infinie : Soient A et B des opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

- Lorsque $A - B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on peut avoir

$$f(A) - f(B) \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(prendre $f(x) = |x|$)
Idem pour $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$.

En dimension infinie : Soient A et B des opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

- Lorsque $A - B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on peut avoir

$$f(A) - f(B) \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(prendre $f(x) = |x|$)

Idem pour $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$.

- Cependant, si $1 < p < \infty$ et $A - B \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$, alors

$$f(A) - f(B) \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$$

(D. Potapov, F. Sukochev, 2011)

En dimension infinie : Soient A et B des opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

- Lorsque $A - B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on peut avoir

$$f(A) - f(B) \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(prendre $f(x) = |x|$)

Idem pour $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$.

- Cependant, si $1 < p < \infty$ et $A - B \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$, alors

$$f(A) - f(B) \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$$

(D. Potapov, F. Sukochev, 2011)

- *Idée* : étude de $[a_{ij}] \mapsto [m_{ij}a_{ij}]$ lorsque $m_{ij} = \frac{f(i) - f(j)}{i - j}$.

Soit $1 < p < \infty$, soient A, K des opérateurs autoadjoints sur \mathcal{H} tels que K est borné. On définit

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \quad (\in \mathcal{S}^p(\mathcal{H}) \text{ if } K \in \mathcal{S}^p).$$

Dérivabilité de φ ? Dérivées d'ordres supérieurs?

Différentiabilité de

$$A \mapsto f(A)?$$

Dérivabilité du premier ordre

- Yu. L. Daletskii et S. G. Krein (1956)

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et A est borné, alors φ est dérivable pour la norme d'opérateurs.

Dérivabilité du premier ordre

- Yu. L. Daletskii et S. G. Krein (1956)

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et A est borné, alors φ est dérivable pour la norme d'opérateurs.

- Yu. B. Farforovskaya (1976)

" $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec une dérivée bornée" n'est pas suffisant pour assurer la dérivabilité de φ pour la norme d'opérateurs (prendre f presque égale à $|\cdot|$).

Dérivabilité du premier ordre

- Yu. L. Daletskii et S. G. Krein (1956)

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et A est borné, alors φ est dérivable pour la norme d'opérateurs.

- Yu. B. Farforovskaya (1976)

" $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec une dérivée bornée" n'est pas suffisant pour assurer la dérivabilité de φ pour la norme d'opérateurs (prendre f presque égale à $|\cdot|$).

- E. Kissin, D. Potapov, V. Shulman, F. Sukochev (2012)

Si f est dérivable de dérivée bornée, alors φ est \mathcal{S}^p -dérivable.

Opérateurs intégraux multiples

Soient $A_i = A_i^* = \sum_{k=1}^N \lambda_k^i P_k^i \in M_N(\mathbb{C})$, $\phi : \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \rightarrow \mathbb{C}$

mesurable et bornée (*symbole*). On pose

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma^{A_1, \dots, A_n}(\phi) \right] (X_1, \dots, X_{n-1}) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^N \varphi(\lambda_{k_1}^1, \dots, \lambda_{k_n}^n) P_{k_1}^1 X_1 P_{k_2}^2 \cdots P_{k_{n-1}}^{n-1} X_{n-1} P_{k_n}^n \end{aligned}$$

Opérateurs intégraux multiples

Soient $A_i = A_i^* = \sum_{k=1}^N \lambda_k^i P_k^i \in M_N(\mathbb{C})$, $\phi : \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \rightarrow \mathbb{C}$

mesurable et bornée (*symbole*). On pose

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma^{A_1, \dots, A_n}(\phi) \right] (X_1, \dots, X_{n-1}) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^N \varphi(\lambda_{k_1}^1, \dots, \lambda_{k_n}^n) P_{k_1}^1 X_1 P_{k_2}^2 \cdots P_{k_{n-1}}^{n-1} X_{n-1} P_{k_n}^n \end{aligned}$$

Applications $n - 1$ linéaires continues

$$\Gamma^{A_1, \dots, A_n}(\phi) : \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \times \cdots \times \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}^2(\mathcal{H}).$$

\hookrightarrow Versions multilinéaires et continues des multiplicateurs de Schur, appelées *opérateurs intégraux multiples*.

Opérateurs intégraux multiples

Soient $A_i = A_i^* = \sum_{k=1}^N \lambda_k^i P_k^i \in M_N(\mathbb{C})$, $\phi : \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \rightarrow \mathbb{C}$

mesurable et bornée (*symbole*). On pose

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma^{A_1, \dots, A_n}(\phi) \right] (X_1, \dots, X_{n-1}) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^N \varphi(\lambda_{k_1}^1, \dots, \lambda_{k_n}^n) P_{k_1}^1 X_1 P_{k_2}^2 \cdots P_{k_{n-1}}^{n-1} X_{n-1} P_{k_n}^n \end{aligned}$$

Applications $n - 1$ linéaires continues

$$\Gamma^{A_1, \dots, A_n}(\phi) : \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \times \cdots \times \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}^2(\mathcal{H}).$$

\hookrightarrow Versions multilinéaires et continues des multiplicateurs de Schur, appelées *opérateurs intégraux multiples*.

Par exemple, si $A - B \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$, on a

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A, B}(f^{[1]}) \right] (A - B).$$

Pour quels symboles ?

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, f n fois dérivable sur \mathbb{R} avec $f^{(n)}$ bornée. On définit la différence divisée d'ordre n , $f^{[n]}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, par récurrence avec les formules :

$$f^{[1]}(x_0, x_1) := \begin{cases} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ f'(x_0) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}.$$

Pour quels symboles ?

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, f n fois dérivable sur \mathbb{R} avec $f^{(n)}$ bornée. On définit la différence divisée d'ordre n , $f^{[n]}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, par récurrence avec les formules :

$$f^{[1]}(x_0, x_1) := \begin{cases} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ f'(x_0) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}.$$

$$f^{[n]}(x_0, x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \frac{f^{[n-1]}(x_0, x_2, \dots, x_n) - f^{[n-1]}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_0 - x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ \partial_1 f^{[n-1]}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}.$$

Pour quels symboles ?

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, f n fois dérivable sur \mathbb{R} avec $f^{(n)}$ bornée. On définit la différence divisée d'ordre n , $f^{[n]}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, par récurrence avec les formules :

$$f^{[1]}(x_0, x_1) := \begin{cases} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ f'(x_0) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}.$$

$$f^{[n]}(x_0, x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \frac{f^{[n-1]}(x_0, x_2, \dots, x_n) - f^{[n-1]}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_0 - x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ \partial_1 f^{[n-1]}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}.$$

Alors, si $1 < p < \infty$, (D. Potapov, F. Sukochev, A. Skripka, 2013)

$$\Gamma^{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}}(f^{[n]}) : \mathcal{S}^{p n} \times \dots \times \mathcal{S}^{p n} \rightarrow \mathcal{S}^p$$

est bornée. Plus précisément, il existe $c_{p,n} > 0$ ne dépendant que de p et de n telle que

$$\|\Gamma^{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}}(f^{[n]})\|_p \leq c_{p,n} \|f^{(n)}\|_\infty.$$

Dérivées d'ordre supérieur

THÉORÈME (C.C., C. LE MERDY, A. SKRIPKA, F. SUKOCHEV, 2018)

Soient A et K autoadjoints sur \mathcal{H} avec $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n(\mathbb{R})$. On suppose soit que A est borné, soit que $f^{(i)}$ est bornée pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H}).$$

Dérivées d'ordre supérieur

THÉORÈME (C.C., C. LE MERDY, A. SKRIPKA, F. SUKOCHEV, 2018)

Soient A et K autoadjoints sur \mathcal{H} avec $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n(\mathbb{R})$. On suppose soit que A est borné, soit que $f^{(i)}$ est bornée pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H}).$$

Alors φ appartient à $C^n(\mathbb{R}, \mathcal{S}^2(\mathcal{H}))$ et pour tout entier $1 \leq k \leq n$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(t) = \left[\Gamma_{A+tK, A+tK, \dots, A+tK} (f^{[k]}) \right] (K, \dots, K).$$

THÉORÈME (C. C., 2019)

Soient $1 < p < \infty$, A et K autoadjoints sur \mathcal{H} avec $K \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et soit f n fois dérivable sur \mathbb{R} telle que les $f^{(i)}$ sont bornées pour tout $1 \leq i \leq n$. On considère la fonction

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H}).$$

Alors φ est n fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $1 \leq k \leq n$, $\varphi^{(k)}$ est donné par un opérateur intégral multiple et est bornée.

PROPOSITION

Mêmes hypothèses sur f . Soit $1 < p < \infty$, K un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} avec $K \in \mathcal{S}^{np}(\mathcal{H})$. On note

$$R_{n,p,A,K,f} = f(A+K) - f(A) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \left(f(A+tK) \right) \Big|_{t=0}.$$

Alors

$$R_{n,p,A,K,f} = \left[\Gamma^{A+K,A,\dots,A}(f^{[n]}) \right] (K, \dots, K), \quad (1)$$

et on a l'inégalité

$$\|R_{n,p,A,K,f}\|_p \leq c_{p,n} \|f^{(n)}\|_\infty \|K\|_{np}^n. \quad (2)$$

PROPOSITION

Soit $1 < p < \infty$, soient A and K autoadjoints sur \mathcal{H} avec $K \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$. Soient $n \geq 2$ et $f \in C^n(\mathbb{R})$. On suppose soit que A est borné, soit que les $f^{(i)}$ est bornée pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors la fonction

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$$

est n -fois continûment dérivable sur \mathbb{R} .

Quid de la différentiabilité ?

THÉORÈME (C. LE MERDY, A. SKRIPKA, 2018)

Soit $1 < p < \infty$, soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ et soit $f \in C^n(\mathbb{R})$ telle que $f', \dots, f^{(n)}$ sont bornées. On suppose de plus soit que $f^{(n)} \in C_0(\mathbb{R})$, soit que $f^{(n+1)}$ existe et est bornée.

Alors f est n fois continûment différentiable en tout $A = A^$.*

Outils pour les démonstrations :

- Formule

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]}) \right] (A - B)$$

et une version similaire à l'ordre supérieur.

Outils pour les démonstrations :

- Formule

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]}) \right] (A - B)$$

et une version similaire à l'ordre supérieur.

- Crucial : les opérateurs en jeu sont bornés.

Outils pour les démonstrations :

- Formule

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]}) \right] (A - B)$$

et une version similaire à l'ordre supérieur.

- Crucial : les opérateurs en jeu sont bornés.
- Approximation de $f^{[n]}$ dans le cas où $f^{(n)}$ continue.
- Dans le cas où $f^{(n)}$ est seulement bornée, plus compliqué : on approxime les opérateurs...

Outils pour les démonstrations :

- Formule

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]}) \right] (A - B)$$

et une version similaire à l'ordre supérieur.

- Crucial : les opérateurs en jeu sont bornés.
- Approximation de $f^{[n]}$ dans le cas où $f^{(n)}$ continue.
- Dans le cas où $f^{(n)}$ est seulement bornée, plus compliqué : on approxime les opérateurs...
- Continuité des dérivées : bornitude des dérivées + plusieurs types d'approximations avec quelques astuces algébriques.

Formule de trace

Les éléments de $S^1(\mathcal{H})$ ont un "trace", comme pour une matrice finie.

Supposons que f est opérateur-Lipschitz i.e.

$$f(A + K) - f(A) \in S^1(\mathcal{H})$$

pour tout $A = A^*$ et tout $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$.

Ceci implique que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f' est bornée.

Formule de trace

Les éléments de $S^1(\mathcal{H})$ ont un "trace", comme pour une matrice finie.

Supposons que f est opérateur-Lipschitz i.e.

$$f(A + K) - f(A) \in S^1(\mathcal{H})$$

pour tout $A = A^*$ et tout $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$.

Ceci implique que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f' est bornée.

Soient $A = A^*$ et $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$. Alors (Krein, 1953 et V. Peller, 2016) il existe $\xi \in L^1(\mathbb{R})$ (ne dépendant que de A et K) telle que

$$\text{Tr}(f(A + K) - f(A)) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\xi(t) dt.$$

Formule de trace

Les éléments de $S^1(\mathcal{H})$ ont un "trace", comme pour une matrice finie.

Supposons que f est opérateur-Lipschitz i.e.

$$f(A + K) - f(A) \in S^1(\mathcal{H})$$

pour tout $A = A^*$ et tout $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$.

Ceci implique que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f' est bornée.

Soient $A = A^*$ et $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$. Alors (Krein, 1953 et V. Peller, 2016) il existe $\xi \in L^1(\mathbb{R})$ (ne dépendant que de A et K) telle que

$$\text{Tr}(f(A + K) - f(A)) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\xi(t) dt.$$

Par exemple, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\text{Tr}((A + K - \alpha I)^{-1} - (A - \alpha I)^{-1}) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t - \alpha)^2} \xi(t) dt.$$

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.

Alors

$$f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} = \left[\Gamma^{A+K, A, A}(f^{[2]}) \right] (K, K)$$

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.

Alors

$$f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} = \left[\Gamma^{A+K, A, A}(f^{[2]}) \right] (K, K)$$

n'est pas toujours un élément de $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$!

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.

Alors

$$f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} = \left[\Gamma^{A+K, A, A}(f^{[2]}) \right] (K, K)$$

n'est pas toujours un élément de $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$!

Comment garantir que $f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$?

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.

Alors

$$f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} = \left[\Gamma^{A+K, A, A}(f^{[2]}) \right] (K, K)$$

n'est pas toujours un élément de $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$!

Comment garantir que $f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$?

(C. C., C. Le Merdy, F. Sukochev, 2017) Supposons qu'il existe un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} et deux fonctions boréliennes bornées $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ telles que

$$f^{[2]}(s, t, u) = \langle a(s, t), b(t, u) \rangle, \quad \forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^3.$$

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.

Alors

$$f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} = \left[\Gamma^{A+K, A, A}(f^{[2]}) \right] (K, K)$$

n'est pas toujours un élément de $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$!

Comment garantir que $f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$?

(C. C., C. Le Merdy, F. Sukochev, 2017) Supposons qu'il existe un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} et deux fonctions boréliennes bornées $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ telles que

$$f^{[2]}(s, t, u) = \langle a(s, t), b(t, u) \rangle, \quad \forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^3.$$

Alors $f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$!

THÉORÈME (C.C, C. LE MERDY, A. SKRIPKA, F. SUKOCHEV, 2018)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que f'' est bornée.. Supposons qu'il existe un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} et deux fonctions boréliennes bornées $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ tels que

$$f^{[2]}(s, t, u) = \langle a(s, t), b(t, u) \rangle, \quad \forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^3.$$

Soient $A, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjoints avec $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$.

THÉORÈME (C.C, C. LE MERDY, A. SKRIPKA, F. SUKOCHEV, 2018)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que f'' est bornée.. Supposons qu'il existe un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} et deux fonctions boréliennes bornées $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ tels que

$$f^{[2]}(s, t, u) = \langle a(s, t), b(t, u) \rangle, \quad \forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^3.$$

Soient $A, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjoints avec $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$.

Alors il existe $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ ("fonction de Kopljenko") telle que

$$\text{Tr}\left(f(A + K) - f(A) - \frac{d}{dt}f(A + tK)|_{t=0}\right) = \int_{\mathbb{R}} f''(t)\eta(t) dt.$$

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

\rightsquigarrow Par exemple $f(x) = \frac{1}{(x - \alpha)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

\rightsquigarrow Par exemple $f(x) = \frac{1}{(x - \alpha)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f^{[2]} \in C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R})$.

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

\rightsquigarrow Par exemple $f(x) = \frac{1}{(x - \alpha)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

\rightsquigarrow $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f^{[2]} \in C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R})$.

\rightsquigarrow Les fonctions dans la classe de Besov $f \in B_{\infty,1}^2(\mathbb{R})$.

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

\rightsquigarrow Par exemple $f(x) = \frac{1}{(x - \alpha)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f^{[2]} \in C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R})$.

\rightsquigarrow Les fonctions dans la classe de Besov $f \in B_{\infty,1}^2(\mathbb{R})$.

Ce résultat est-il optimal ?

Merci de votre attention !