

On the Quenched Functional Central Limit Theorem for Stationary Random Fields Under Projective Criteria

Lucas REDING

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
UMR CNRS 6085, Université de Rouen Normandie
(joint work with N. Zhang (Towson))

Journée de la fédération de Mathématiques

6 novembre 2020



Plan

- 1 Champs de variables aléatoires
- 2 Condition de Hannan
- 3 Théorème *Quenched*
- 4 Resultats *Quenched* principaux
- 5 Théorèmes fonctionnels
- 6 Résultats fonctionnels *quenched* principaux

Champs de variables aléatoires

Champ de variables aléatoires

Un champ de variables aléatoires est une famille de variables aléatoires indexée par $\mathbb{Z}^d$, où $d > 1$.

Champs de variables aléatoires

Champ de variables aléatoires

Un champ de variables aléatoires est une famille de variables aléatoires indexée par $\mathbb{Z}^d$, où $d > 1$.

Stationnarité au sens fort

On dit qu'un champ de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est fortement stationnaire si pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, $(X_{i+n})_{i \in \mathbb{Z}^d} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$.

Exemple I

Champ de v.a.i.i.d.

Soient ϵ_i , $i \in \mathbb{Z}^d$ des v.a.i.i.d. Alors, on dit que $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ de variables aléatoires i.i.d.

Exemple II

Champ linéaire

Soient $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ un champ de v.a.i.i.d. centrées de carrés intégrables et $a_i, i \in \mathbb{Z}^d$ des nombres réels qui satisfont $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i^2 < +\infty$. On dit que

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \epsilon_{i-j} \right)_{i \in \mathbb{Z}^d}$$

est un champ linéaire aléatoire.

Exemple III

Champ de Volterra

Soient $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ un champ de v.a.i.i.d. centrées de carrés intégrables et $a_i, i \in \mathbb{Z}^d$ des nombres réels qui satisfont $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i^2 < +\infty$. On dit que

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ k \neq j}} a_j a_k \epsilon_{i-j} \epsilon_{i-k} \right)_{i \in \mathbb{Z}^d}$$

est un champ aléatoire de Volterra.

Condition de Hannan

- ▷ $T_1, \dots, T_d$: transformations bi-mesurables qui commutent et préservent la mesure

Condition de Hannan

- ▷ $T_1, \dots, T_d$: transformations bi-mesurables qui commutent et préservent la mesure
- ▷ $\mathcal{F}_0$: tribu

Condition de Hannan

- ▷ $T_1, \dots, T_d$: transformations bi-mesurables qui commutent et préservent la mesure
- ▷ $\mathcal{F}_0$: tribu
- ▷ $\mathcal{F}_{\mathbf{i}} = T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_0$, pour $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$

Condition de Hannan

- ▷ $T_1, \dots, T_d$: transformations bi-mesurables qui commutent et préservent la mesure
- ▷ $\mathcal{F}_0$: tribu
- ▷ $\mathcal{F}_{\mathbf{i}} = T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_0$, pour $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{\mathbf{a}}] | \mathcal{F}_{\mathbf{b}}] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{\min(\mathbf{a}, \mathbf{b})}]$$

Supposons que la famille $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ forme une **filtration commutante**.

Condition de Hannan

- ▷ $T_1, \dots, T_d$: transformations bi-mesurables qui commutent et préservent la mesure
- ▷ $\mathcal{F}_0$: tribu
- ▷ $\mathcal{F}_i = T^{-i} \mathcal{F}_0$, pour $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{F}_a] | \mathcal{F}_b] = \mathbb{E} [X | \mathcal{F}_{\min(a,b)}]$$

Supposons que la famille $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ forme une **filtration commutante**.

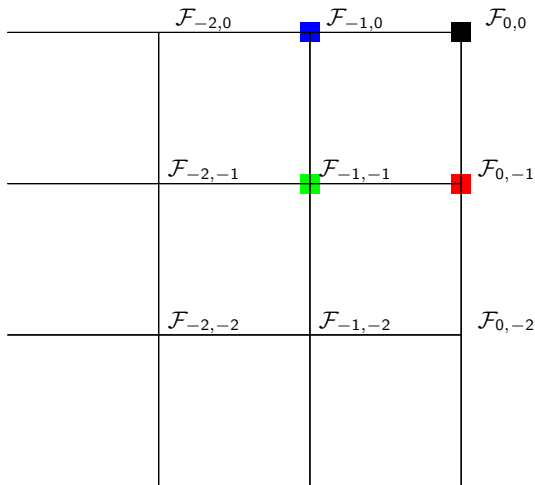
Définition : Opérateur de projection

Pour tout fonction intégrable f , on définit

$$\mathcal{P}_i(f) = \prod_{j=1}^d \left(\mathbb{E} [\cdot | \mathcal{F}_i] - \mathbb{E} [\cdot | \mathcal{F}_{i - \mathbf{e}_j}] \right)(f), \quad \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d,$$

où $\mathbf{e}_j$ est le multi-indice dont toutes les composantes sont nulles sauf la j -ième qui vaut 1.

Dimension 2



$$\mathcal{P}_{0,0}(f) = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_{0,0}] - \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_{0,-1}] - \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_{-1,0}] + \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_{-1,-1}]$$

Condition de Hannan (1973)

On dit que le champ X vérifie la condition projective de Hannan si

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \|\mathcal{P}_0(X_{\mathbf{k}})\|_2 < +\infty.$$

Théorème *Quenched*

▷ $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: champ de variables aléatoires centrées

Théorème *Quenched*

- ▷ $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: champ de variables aléatoires centrées
- ▷ $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: filtration

Théorème Quenched

- ▷ $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: champ de variables aléatoires centrées
- ▷ $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: filtration $\mathbb{P}(A \cap B) = \int_B \mathbb{P}^\omega(A) d\mathbb{P}(\omega)$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}_0$
- ▷ $\mathbb{P}^\omega$ une **version régulière** de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | \mathcal{F}_0)$ pour l'aléa $\omega \in \Omega$

Théorème *Quenched*

- ▷ $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: champ de variables aléatoires centrées
- ▷ $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: filtration $\mathbb{P}(A \cap B) = \int_B \mathbb{P}^\omega(A) d\mathbb{P}(\omega)$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}_0$
- ▷ $\mathbb{P}^\omega$ une **version régulière** de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | \mathcal{F}_0)$ pour l'aléa $\omega \in \Omega$

Définition : TCL *Quenched*

On dit que le champ $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ satisfait un théorème central limite *quenched* dès lors que pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$,

$$|\mathbf{n}|^{-1/2} \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_i \xrightarrow[\mathbf{n} \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{sous } \mathbb{P}^\omega$$

où $|\mathbf{n}| = n_1 \cdots n_d$.

Théorème *Quenched*

- ▷ $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: champ de variables aléatoires centrées
- ▷ $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$: filtration $\mathbb{P}(A \cap B) = \int_B \mathbb{P}^\omega(A) d\mathbb{P}(\omega)$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}_0$
- ▷ $\mathbb{P}^\omega$ une **version régulière** de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | \mathcal{F}_0)$ pour l'aléa $\omega \in \Omega$

Définition : TCL *Quenched*

On dit que le champ $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ satisfait un théorème central limite *quenched* dès lors que pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$,

$$|\mathbf{n}|^{-1/2} \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_i \xrightarrow[\mathbf{n} \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{sous } \mathbb{P}^\omega$$

où $|\mathbf{n}| = n_1 \cdots n_d$.

Dans le cas classique (c'est à dire que le TCL est satisfait sous la probabilité $\mathbb{P}$), on dit que le théorème est *annealed*.

Resultats *Quenched* principaux

▷ $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de v.a.

Resultats *Quenched* principaux

- ▷ $(\xi_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de v.a.
- ▷ $X_{\mathbf{i}} = f((\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \leq \mathbf{i}})$ pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$

Resultats *Quenched* principaux

- ▷ $(\xi_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de v.a.
- ▷ $X_{\mathbf{i}} = f((\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \leq \mathbf{i}})$ pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$
- ▷ $S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{u}=1}^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{u}}$

Resultats *Quenched* principaux

- ▷ $(\xi_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de v.a.
- ▷ $X_{\mathbf{i}} = f((\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \leq \mathbf{i}})$ pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$
- ▷ $S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{u}=1}^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{u}}$
- ▷ La variable aléatoire $X_{\mathbf{0}}$ est supposée centrée et de carré intégrable.
On définit aussi les translations canoniques T_i et alors

$$X_{\mathbf{k}} = f(T_1^{k_1} \circ \dots \circ T_d^{k_d}(\xi_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \leq \mathbf{0}}).$$

Resultats *Quenched* principaux

- ▷ $(\xi_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de v.a.
- ▷ $X_{\mathbf{i}} = f((\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \leq \mathbf{i}})$ pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$
- ▷ $S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{u}=1}^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{u}}$
- ▷ La variable aléatoire $X_{\mathbf{0}}$ est supposée centrée et de carré intégrable.
On définit aussi les translations canoniques T_i et alors

$$X_{\mathbf{k}} = f(T_1^{k_1} \circ \dots \circ T_d^{k_d}(\xi_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \leq \mathbf{0}}).$$

- ▷ $\mathcal{F}_{\mathbf{u}} = \sigma(\xi_{\mathbf{j}} : \mathbf{j} \leq \mathbf{u})$

Resultats *Quenched* principaux

- ▷ $(\xi_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de v.a.
- ▷ $X_{\mathbf{i}} = f((\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \leq \mathbf{i}})$ pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$
- ▷ $S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{u}=1}^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{u}}$
- ▷ La variable aléatoire $X_{\mathbf{0}}$ est supposée centrée et de carré intégrable. On définit aussi les translations canoniques T_i et alors

$$X_{\mathbf{k}} = f(T_1^{k_1} \circ \dots \circ T_d^{k_d}(\xi_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \leq \mathbf{0}}).$$

- ▷ $\mathcal{F}_{\mathbf{u}} = \sigma(\xi_{\mathbf{j}} : \mathbf{j} \leq \mathbf{u})$
- ▷ $\mathbb{P}^\omega$ une version régulière de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | \mathcal{F}_0)$ pour l'aléa $\omega \in \Omega$

Théorème Central Limite *Quenched* pour des régions cubiques (Peligrad, Zhang, R. ; 2019)

$$T_i^{-1}(A) = A \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$$

On suppose qu'il existe un entier $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, tel que T_i soit **ergodique** et que les filtrations soient commutantes. De plus on suppose que

$$\sum_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\mathbf{u}})\|_2 < +\infty. \quad (1)$$

Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$(S_{n,\dots,n} - R_{n,\dots,n})/n^{d/2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{sous } \mathbb{P}^\omega.$$

où $R_{n,\dots,n} = \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq d} \mathbb{E} [S_{n,\dots,n} | \mathcal{F}_{n\mathbf{1}^{(j_1,\dots,j_d)}}]$ avec $\mathbf{1}^{(j_1,\dots,j_d)}$ le multi-indice obtenu en remplaçant par 0 toutes les $j_1, \dots, j_i$ -ième coordonnées du multi-indice $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ et en laissant les autres inchangées.

Théorème Central Limite *Quenched* pour des régions rectangulaires (Peligrad, Zhang, R. ; 2019)

De plus, si on remplace l'hypothèse (1) par l'hypothèse plus forte suivante :

$$\sum_{\mathbf{u} \geq 0} \|\mathcal{P}_0(X_{\mathbf{u}})\|_{\varphi} < +\infty,$$

$\|h\|_{\phi} = \inf \{k \in]0, +\infty[: \mathbb{E} [\phi(|h|/k)] \leq 1\}$

où $\varphi(x) = x^2 \log^{d-1}(1 + |x|)$ et $\|\cdot\|_{\varphi}$ est la **norme de Orlicz associée à φ** .
Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} (S_{\mathbf{n}} - R_{\mathbf{n}}) \xrightarrow[\mathbf{n} \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{sous } \mathbb{P}^{\omega}.$$

où $R_{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq d} \mathbb{E} [S_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}_{\mathbf{n}^{(j_1, \dots, j_d)}}]$ avec $\mathbf{n}^{(j_1, \dots, j_d)}$ le multi-indice obtenu en remplaçant par 0 toutes les $j_1, \dots, j_i$ -ième coordonnées du multi-indice $\mathbf{n}$ et en laissant les autres inchangées.

Espace de Skrohod en dimension 1

Définition : Espace de Skorohod

$$D([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est càdlàg}\}$$

Espace de Skorohod en dimension 1

Définition : Espace de Skorohod

$$D([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est càdlàg}\}$$

Définition : Topologie de Skorohod

E : bijections continues strictement croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même.

Espace de Skrohod en dimension 1

Définition : Espace de Skorohod

$$D([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est càdlàg}\}$$

Définition : Topologie de Skorohod

E : bijections continues strictement croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même.

$$d_0(u, v) := \inf_{f \in E} \max \left\{ \sup_{s < t} \left| \ln \left(\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right) \right|, \|u - v \circ f\|_\infty \right\},$$

pour tous $u, v \in D([0, 1])$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infini.

Espace de Skorohod en dimension 1

Définition : Espace de Skorohod

$$D([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est càdlàg}\}$$

Définition : Topologie de Skorohod

E : bijections continues strictement croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même.

$$d_0(u, v) := \inf_{f \in E} \max \left\{ \sup_{s < t} \left| \ln \left(\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right) \right|, \|u - v \circ f\|_\infty \right\},$$

pour tous $u, v \in D([0, 1])$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infini.

La topologie de Skorohod est la topologie engendrée par cette métrique d_0 .

Espace de Skorohod en dimension > 1

▷ Espace ambiant : $[0, 1]^d$

Espace de Skrohod en dimension > 1

- ▷ Espace ambiant : $[0, 1]^d$
- ▷ $I(\rho, u) = I_1(\rho_1, u_1) \times \cdots \times I_d(\rho_d, u_d)$

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, I_i(\rho_i, u_i) = \begin{cases} [0, u_i[& \text{si } \rho_i = 0 \\]u_i, 1] & \text{si } \rho_i = 1. \end{cases}$$

pour tout $(\rho_1, \dots, \rho_d) \in \{0, 1\}^d$ et pour tout $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$,

Définition : ρ -limite

Soient $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in \{0, 1\}^d$ et $t \in [0, 1]^d$ tels que $I(\rho, t) \neq \emptyset$, on dit que f admet une ρ -limite en t si pour toute suite convergente $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $I(\rho, t)$, la suite $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Définition : ρ -limite

Soient $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in \{0, 1\}^d$ et $t \in [0, 1]^d$ tels que $I(\rho, t) \neq \emptyset$, on dit que f admet une ρ -limite en t si pour toute suite convergente $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $I(\rho, t)$, la suite $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Remarques

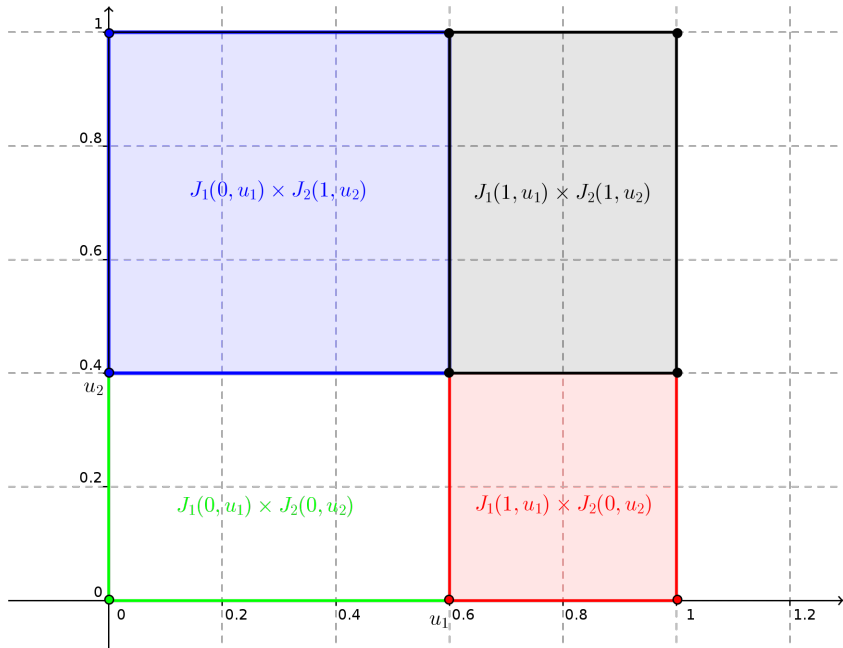
- La ρ -limite, si elle existe, est unique.
- Si cette limite existe, on la note $\rho\text{-}\lim_{x \rightarrow t} f(x)$.

▷ Espace ambiant : $[0, 1]^d$

- ▷ Espace ambiant : $[0, 1]^d$
- ▷ $\rho \in \{0, 1\}^d$ et $t \in [0, 1]^d$

- ▷ Espace ambiant : $[0, 1]^d$
- ▷ $\rho \in \{0, 1\}^d$ et $t \in [0, 1]^d$
- ▷ $J(\rho, u) = J_1(\rho_1, u_1) \times \cdots \times J_d(\rho_d, u_d)$

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, J_i(\rho_i, u_i) = \begin{cases} [0, u_i[& \text{si } \rho_i = 0 \text{ et } u_i < 1 \\ [0, 1] & \text{si } \rho_i = 0 \text{ et } u_i = 1 \\ [u_i, 1] & \text{si } \rho_i = 1 \text{ et } u_i < 1 \\ \emptyset & \text{si } \rho_i = 1 \text{ et } u_i = 1. \end{cases}$$



Proposition

Pour tout $u \in [0, 1]^d$, $\{J(\rho, u)\}_{\rho \in \{0, 1\}^d}$ est une partition de $[0, 1]^d$

Proposition

Pour tout $u \in [0, 1]^d$, $\{J(\rho, u)\}_{\rho \in \{0, 1\}^d}$ est une partition de $[0, 1]^d$

σ est la fonction qui à tout $t \in [0, 1]^d$ associe l'unique ρ tel que $t \in J(\rho, t)$.

Proposition

Pour tout $u \in [0, 1]^d$, $\{J(\rho, u)\}_{\rho \in \{0, 1\}^d}$ est une partition de $[0, 1]^d$

σ est la fonction qui à tout $t \in [0, 1]^d$ associe l'unique ρ tel que $t \in J(\rho, t)$.

Définition : Espace de Skorohod multi-dimensionnel

$$D([0, 1]^d) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0, 1]^d} : \forall \rho \in \{0, 1\}^d, \forall t \in [0, 1]^d, \rho\text{-}\lim_{x \rightarrow t} f(x) \text{ existe} \right. \\ \left. \text{et } \sigma(t)\text{-}\lim_{x \rightarrow t} f(x) = f(t) \right\}$$

Définition : Topologie de Skorohod

E bijections continues strictement croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même.

Définition : Topologie de Skorohod

E bijections continues strictement croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même.

$$d_0(u, v) = \inf_{\substack{f \in E^d \\ f = (f_1, \dots, f_d)}} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{s < t} \left| \ln \left(\frac{f_i(t) - f_i(s)}{t - s} \right) \right|, \|u - v \circ f\|_\infty \right\},$$

pour tous $u, v \in D([0, 1]^d)$.

Définition : Topologie de Skorohod

E bijections continues strictement croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même.

$$d_0(u, v) = \inf_{\substack{f \in E^d \\ f = (f_1, \dots, f_d)}} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{s < t} \left| \ln \left(\frac{f_i(t) - f_i(s)}{t - s} \right) \right|, \|u - v \circ f\|_\infty \right\},$$

pour tous $u, v \in D([0, 1]^d)$.

La topologie de Skorohod est la topologie engendrée par cette métrique d_0 .

Proposition

$D([0, 1])$ muni de la topologie de Skorohod est un espace métrique complet et séparable.

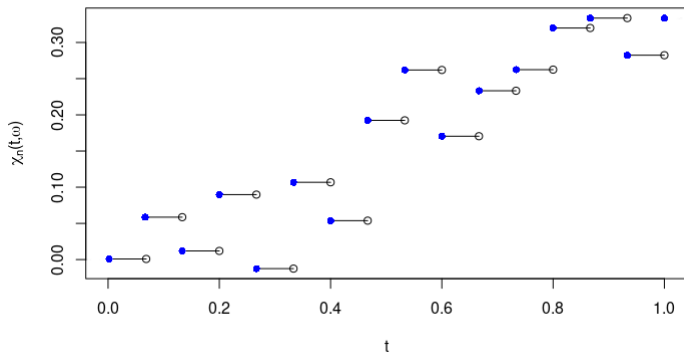
Proposition

$D([0, 1])$ muni de la topologie de Skorohod est un espace métrique complet et séparable.

Définissons les v.a.

$$\chi_n(t, \omega) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i \quad \text{et} \quad f_n(\omega) := \chi_n(\cdot, \omega)$$

où $(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega$.



Définition : Principe d'Invariance

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe d'invariance (PI) lorsque la condition suivante est satisfaite.

La suite des mesures images $(\mathbb{P} \circ (f_n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement dans $D([0, 1])$.

Résultats fonctionnels *quenched* principaux

Théorème Central Limite *Quenched* Fonctionnel pour des régions cubiques (Volný, Zhang, R. ; 2020+)

On suppose qu'il existe un entier $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, tel que T_i soit ergodique et que les filtrations soient commutantes. De plus on suppose que

$$\sum_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\mathbf{u}})\|_2 < +\infty,$$

Alors pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\left(\frac{1}{n^{d/2}} (S_{[nt]\mathbf{1}} - R_{[nt]\mathbf{1}}) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (\sigma W_t)_{t \in [0,1]} \quad \text{sous } \mathbb{P}^\omega,$$

où $\sigma^2 := \mathbb{E}[D_{\mathbf{0}}^2]$ avec $D_{\mathbf{0}} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\mathbf{i}})$, $(W_t)_{t \in [0,1]}$ est un mouvement Brownien standard, $k\mathbf{1} = (k, \dots, k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et la convergence a lieu dans $D([0,1])$ muni de la topologie de la norme infinie.

Théorème Central Limite *Quenched* Fonctionnel pour des régions rectangulaires (Volný, Zhang, R. ; 2020+)

De plus, si on remplace l'hypothèse (24) par l'hypothèse plus forte suivante :

$$\sum_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\mathbf{u}})\|_{\phi} < +\infty,$$

où $\phi(x) = x^2(\ln(1 + |x|))^{d-1}$. Alors, for $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} (S_{[\mathbf{t}\mathbf{n}]} - R_{[\mathbf{t}\mathbf{n}]}) \right)_{\mathbf{t} \in [0,1]^d} \xrightarrow[\mathbf{n} \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (\sigma W_{\mathbf{t}})_{\mathbf{t} \in [0,1]^d} \quad \text{sous } \mathbb{P}^{\omega},$$

où σ^2 est défini comme dans le théorème précédent, $(W_{\mathbf{t}})_{\mathbf{t} \in [0,1]^d}$ est un drap Brownien standard et la convergence a lieu dans l'espace de Skorohod $D([0,1]^d)$.



Billingsley, Patrick.

Convergence of Probability Measures.

John Wiley & Sons, 2013, 1999.



Neuhaus, Georg.

On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameter.

The Annals of Mathematical Statistics, 42(4), 1285-1295., 1971.



Peligrad, Magda et Volný, Dalibor.

Quenched invariance principles for orthomartingale-like sequences.

Journal of Theoretical Probability , 33(3), 1238-1265, 2019.



Volný, Dalibor et Wang, Yizao.

An invariance principle for stationary random fields under Hannan's condition.

Stochastic Processes and their Applications, 124(12), 4012-4029, 2014.



Volný, Dalibor et Woodroffe, Michael.

An example of non quenched convergence in the conditional CLT for partial sums of a linear process.

Dependence in Probability, Analysis and Number Theory, 317-323, 2010.