Développements de réels en base non entière: approche dynamique

Younès Tierce, sous la direction de Thierry de la Rue et Jean-Baptiste Bardet

Université de Rouen, LMRS

6 novembre 2020

Écriture d'un réel en base β

Soit $\beta > 1$ un réel non entier, et $x \in I_\beta := \left[0; \frac{\lfloor \beta \rfloor}{\beta - 1}\right]$. Un développement en base β du réel x est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers dans $\{0, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$ telle que

Écriture d'un réel en base β

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^n}.$$

On écrit alors $x = 0.x_1 x_2 \dots$.

Par la suite, on supposera que $1 < \beta < 2$.

Certaines applications des bases non entières

- base $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ utilisée dans des méthodes de conversions analogique-numérique « beta encoder »(semblent dépassées aujourd'hui)
- Pavages quasi-périodiques : pavages de Pisot

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.414213\ldots$

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.414213\dots$
- En base 2 : $\sqrt{2}$ s'écrit

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.414213\ldots$
- En base 2 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.01101\ldots$

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.414213\ldots$
- En base 2 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.01101\ldots$
- En base 1.4 : $\sqrt{2}$ s'écrit

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.414213\ldots$
- En base 2 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.01101\ldots$
- En base 1.4 : $\sqrt{2}$ s'écrit $0.110010\ldots$

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.414213\ldots$
- En base 2 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.01101\ldots$
- En base 1.4 : $\sqrt{2}$ s'écrit $0.110010\ldots$ mais aussi $0.01011111\ldots$

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.414213\dots$
- En base 2 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.01101\dots$
- En base 1.4 : $\sqrt{2}$ s'écrit $0.110010\dots$ mais aussi $0.01011111\dots$ et d'une infinité d'autres manières possibles !

Exemple : différentes écritures de $\sqrt{2}$

- En base 10 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.414213\ldots$
- En base 2 : $\sqrt{2}$ s'écrit $1.01101\ldots$
- En base 1.4 : $\sqrt{2}$ s'écrit $0.110010\ldots$ mais aussi $0.01011111\ldots$ et d'une infinité d'autres manières possibles !

Questions :

Comment obtenir un développement en base β d'un réel x ? Comment les obtenir tous ?

Comment générer les développements en base β ?

Transformation greedy

$$T_g : \begin{array}{ccc} I_\beta & \to & I_\beta \\ x & \mapsto & \beta x \bmod 1 \end{array} .$$

Itérer T_g à partir d'un réel x permet d'obtenir le développement de x en base β le plus grand dans l'ordre lexicographique : le développement greedy (Erdös, Joo).

Exemple : développement greedy de $\sqrt{2}$ en base 1.4

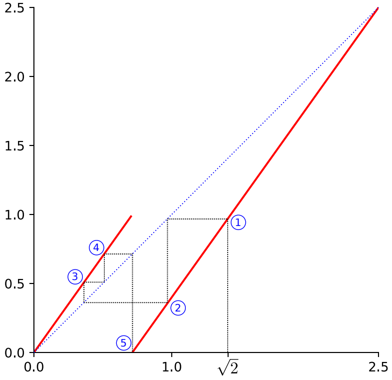


FIGURE – Premières itérations de T_g à partir de $x = \sqrt{2}$

Transformation lazy T_ℓ

Transformation lazy

$$T_\ell : \begin{array}{ccc} I_\beta & \to & I_\beta \\ x & \mapsto & \begin{cases} \beta x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)} \\ \beta x - 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

Itérer T_ℓ à partir d'un réel x permet d'obtenir le développement le plus petit dans l'ordre lexicographique.

T_g et T_ℓ : on a le choix

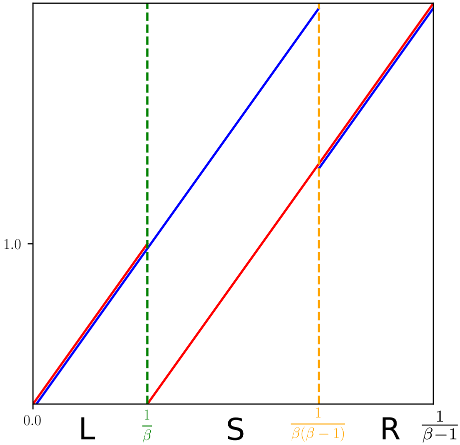


FIGURE – Courbes de T_g et T_ℓ

Obtenir tous les développements en base β ?

- Idée : choisir entre greedy et lazy à chaque itération.
- Formellement : $\Omega = \{g, \ell\}^{\mathbb{N}}$, avec la mesure de Bernoulli $(p, 1-p)$.
- On tire au hasard une succession de "g" et de "ℓ", qui détermine la succession des applications greedy et lazy, et donne un développement en base β.

Système dynamique aléatoire

$$K_\beta : \begin{array}{ccc} \Omega \times I_\beta & \rightarrow & \Omega \times I_\beta \\ (\omega, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), T_{\omega_0}(x)) \end{array}.$$

où σ est le décalage vers la gauche.

Développement le long d'une suite ω

Pour toute suite $\omega \in \Omega$, et tout $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$, on note $\pi(\omega, x) := x$ la projection sur I_β. À ω fixé, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_n(\omega) = \begin{cases} 1_{\{\pi(K_\beta^{n-1}(\omega,x)) \geqslant \frac{1}{\beta}\}} & \text{si } \omega_{n-1} = g \\ 1_{\{\pi(K_\beta^{n-1}(\omega,x)) > \frac{1}{\beta(\beta-1)}\}} & \text{si } \omega_{n-1} = \ell \end{cases}.$$

Développement le long d'une suite ω

Pour toute suite $\omega \in \Omega$, et tout $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$, on note $\pi(\omega, x) := x$ la projection sur I_β. À ω fixé, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_n(\omega) = \begin{cases} 1_{\{\pi(K_\beta^{n-1}(\omega,x)) \geqslant \frac{1}{\beta}\}} & \text{si } \omega_{n-1} = g \\ 1_{\{\pi(K_\beta^{n-1}(\omega,x)) > \frac{1}{\beta(\beta-1)}\}} & \text{si } \omega_{n-1} = \ell \end{cases} .$$

Développement le long de la suite ω (Dajani, Kraaikamp)

La suite $(x_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le développement en base β de x « le long de la suite ω » :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n(\omega)}{\beta^n}.$$

Propriétés de K_β

Relation d'ordre respectée (Dajani, De Vries)

Soit $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $\omega \preceq_{lex} \omega'$ (où $\ell < g$). Alors pour tout réel $x \in I_\beta$, on a

$$(x_n(\omega)) \preceq_{lex} (x_n(\omega')).$$

Propriétés de K_β

Relation d'ordre respectée (Dajani, De Vries)

Soit $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $\omega \preceq_{lex} \omega'$ (où $\ell < g$). Alors pour tout réel $x \in I_\beta$, on a

$$(x_n(\omega)) \preceq_{lex} (x_n(\omega')).$$

Mesure invariante

Soit μ une mesure borélienne sur I_β. On dit que la mesure $m_p \otimes \mu$ est invariante par K_β si pour tout borélien B de I_β on a

$$\mu(B) = p \times \mu(T_g^{-1}B) + (1-p) \times \mu(T_\ell^{-1}B).$$

Propriétés de K_β

Relation d'ordre respectée (Dajani, De Vries)

Soit $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $\omega \preceq_{lex} \omega'$ (où $\ell < g$). Alors pour tout réel $x \in I_\beta$, on a

$$(x_n(\omega)) \preceq_{lex} (x_n(\omega')).$$

Mesure invariante

Soit μ une mesure borélienne sur I_β. On dit que la mesure $m_p \otimes \mu$ est invariante par K_β si pour tout borélien B de I_β on a

$$\mu(B) = p \times \mu(T_g^{-1}B) + (1-p) \times \mu(T_\ell^{-1}B).$$

Existence et unicité (Dajani, De Vries)

À p fixé, il existe une unique mesure de probabilité μ_p, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, telle que $m_p \otimes \mu_p$ soit invariante par K_β.

Une question de mesure

Un théroème ergodique

Pour $m_p \otimes Leb$ presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times I_\beta$, on a la convergence étroite

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{\pi(K_\beta^n(\omega,x))} \to \mu_p.$$

Comment obtenir une expression explicite de la densité de μ_p ?

Principe : construire une extension de K_β avec une mesure invariante simple puis projeter cette mesure invariante sur I_β.

Comment obtenir une expression explicite de la densité de μ_p ?

Principe : construire une extension de K_β avec une mesure invariante simple puis projeter cette mesure invariante sur I_β.

1. En 2014, Kempton construit une telle extension dans le cas où $p = \frac{1}{2}$ et obtient l'expression de μ_p.

Comment obtenir une expression explicite de la densité de μ_p ?

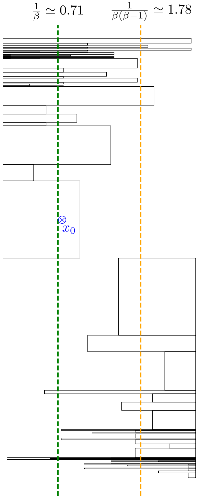
Principe : construire une extension de K_β avec une mesure invariante simple puis projeter cette mesure invariante sur I_β.

1. En 2014, Kempton construit une telle extension dans le cas où $p = \frac{1}{2}$ et obtient l'expression de μ_p.
2. En 2017, à partir de l'expression obtenue par Kempton, Suzuki obtient l'expression générale. La densité de μ_p est vue comme point fixe de l'opérateur de transfert P de K_β, obtenu comme moyenne pondérée des opérateurs de transfert de T_g et T_ℓ.

Comment obtenir une expression explicite de la densité de μ_p ?

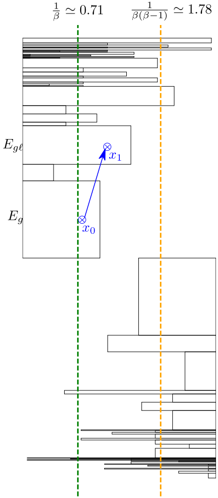
Principe : construire une extension de K_β avec une mesure invariante simple puis projeter cette mesure invariante sur I_β.

1. En 2014, Kempton construit une telle extension dans le cas où $p = \frac{1}{2}$ et obtient l'expression de μ_p.
2. En 2017, à partir de l'expression obtenue par Kempton, Suzuki obtient l'expression générale. La densité de μ_p est vue comme point fixe de l'opérateur de transfert P de K_β, obtenu comme moyenne pondérée des opérateurs de transfert de T_g et T_ℓ.
3. En 2019, on obtient cette expression pour tout $p \in]0,1[$ en construisant explicitement l'extension naturelle de K_β (la plus petite extension de K_β qui soit inversible).



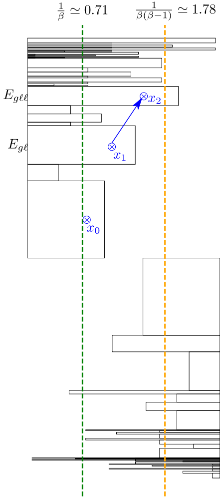
Extension de K_β pour $\beta = 1.4$

$x_0 = 0.75 \quad x_1 = T_\ell(x_0) = \beta x_0 = 1.05$



$\omega = (\ell, \ell, \ell, \ell, g, g, g, \ldots)$

$x_1 = 1.05 \quad x_2 = T_\ell(x_1) = \beta x_1 = 1.47$

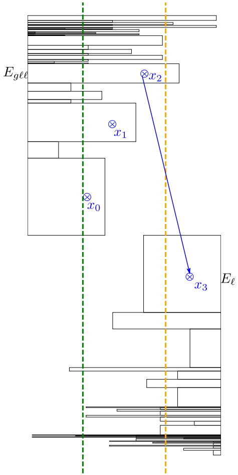


$\omega = (\ell, \ell, \ell, \ell, g, g, g, \ldots)$

$x_2 = 1.47 \quad x_3 = T_\ell(x_2) = \beta x_2 \simeq 2.06$

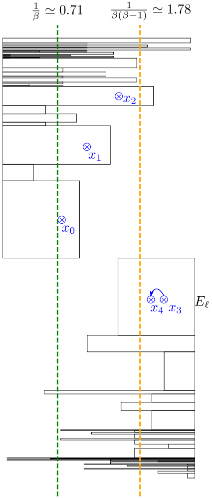
$x_2 \in [\frac{1}{\beta(\beta-1)} - \frac{1}{\beta}; \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$

$\frac{1}{\beta} \simeq 0.71 \qquad \frac{1}{\beta(\beta-1)} \simeq 1.78$



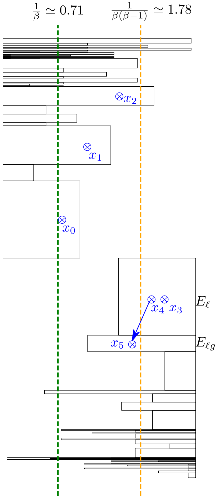
$\omega = (\ell, \ell, \ell, \ell, g, g, g, \dots)$

$x_3 \simeq 2.06$ $x_4 = T_\ell(x_3) = \beta x_3 - 1 \simeq 1.88$



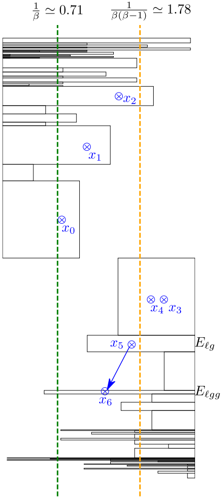
$\omega = (\ell, \ell, \ell, \ell, g, g, g, \ldots)$

$x_4 \simeq 1.88$ $x_5 = T_g(x_4) = \beta x_4 - 1 \simeq 1.63$



$\omega = (\ell, \ell, \ell, \ell, g, g, g, \ldots)$

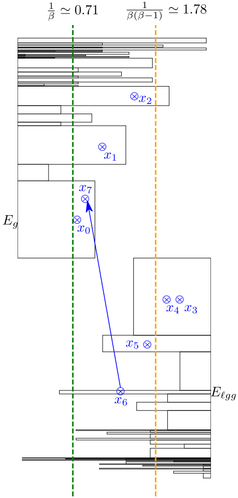
$x_5 \simeq 1.63$ $x_6 = T_g(x_5) = \beta x_5 - 1 \simeq 1.29$



$\omega = (\ell, \ell, \ell, \ell, g, g, g, \ldots)$

$x_6 \simeq 1.29$ $x_7 = T_g(x_6) = \beta x_6 - 1 \simeq 0.80$

$x_6 \in [\frac{1}{\beta}; \frac{2}{\beta}]$



$\omega = (\ell, \ell, \ell, \ell, g, g, g, \ldots)$

Expression de la densité de μ_p

Densité de μ_p (Y.T.)

Pour tout $p \in]0;1[$, la densité de la mesure invariante μ_p est de la forme :

$$\rho_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^n} \left(C_g \sum_{\omega_1,\dots,\omega_n \in \{g,\ell\}^n} m_p([\omega_1,\dots,\omega_n]_0^{n-1}) 1_{[0,T_{\omega_1,\dots,\omega_n}(1^+)]}(x) \right.$$

$$\left. + C_\ell \sum_{\omega_1,\dots,\omega_n \in \{g,\ell\}^n} m_p([\omega_1,\dots,\omega_n]_0^{n-1}) 1_{[T_{\omega_1,\dots,\omega_n}(s(1)^-);\frac{1}{\beta-1}]}(x) \right).$$

où :

- C_g et C_ℓ sont deux constantes strictement positives explicites,
- $m_p([\omega_1,\dots,\omega_n]_0^{n-1})$ est la mesure de Bernoulli du cylindre $[\omega_1,\dots,\omega_n]_0^{n-1}$.

Merci !