

Problème inverse non-linéaire de source dans une équation $2D$ d'advection-diffusion-réaction à coefficients variables

Adel Hamdi et Imed Mahfoudhi

Laboratoire de mathématiques LMI
Institut National des Sciences Appliquées de Rouen
Avenue de l'Université, 76801 Saint-Etienne-du-Rouvray Cedex-France
E-mail: Adel.Hamdi@insa-rouen.fr, Imed.Mahfoudhi@insa-rouen.fr

Nous nous intéressons à la localisation et à l'identification par rapport au temps de la fonction de débit d'une source ponctuelle constituant le second membre d'une équation d'évolution bidimensionnelle de type advection-diffusion-réaction. Il s'agit d'un problème inverse non-linéaire de source. L'originalité de ce travail réside dans l'étude du cas général des équations de transport à tenseur de diffusion et champ de vitesse variables en espace. Plus précisément, nous cherchons à localiser la position S et à reconstituer l'historique par rapport au temps de la fonction de débit $\lambda(t)$ impliquées dans le système suivant:

$$\begin{aligned} L[u](x, t) &= \lambda(t)\delta(x - S) && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_{in} \times (0, T) \\ D\nabla u \cdot \nu &= 0 && \text{sur } (\Gamma_L \cup \Gamma_{out}) \times (0, T) \end{aligned}$$

$L[u](x, t) := \partial_t u(x, t) - \operatorname{div}(D(x)\nabla u(x, t)) + V(x)\nabla u(x, t) + Ru(x, t)$, δ représente la masse de Dirac et Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_{out}$ Lipschitzienne. En outre, D désigne le tenseur de diffusion représenté par une matrice 2×2 symétrique et définie positive, V est le champ de vitesse et R correspond au coefficient de réaction.

Nous montrons que les éléments S et λ définissant la source recherchée sont identifiables de façon unique à partir de la mesure de l'état u sur la frontière de sortie Γ_{out} et la mesure de son flux $D\nabla u \cdot \nu$ sur la frontière d'entrée Γ_{in} . Ensuite, étant données ces mesures frontières nous établissons une méthode d'identification permettant de déterminer S et λ .

Une motivation à ce travail porte sur un problème de contrôle de l'environnement dont le but est l'identification des sources de pollution dans les eaux surface. Quelques résultats numériques effectués sur une variante du modèle de *DBO* (Demande Biologique en Oxygène) concernant la pollution de l'eau d'une rivière sont présentés.