PROBLÈMES DE TRANSMISSION DANS UNE CELLULE BIOLOGIQUE

MAËLIS MEISNER [1]

On considère une cellule biologique $\Omega^{*\varepsilon} = \overline{\Omega_-^*} \cup \Omega_+^{*\varepsilon}$ constituée d'un cytoplasme homogène Ω_-^*, de bord Γ^*, centré en $(0,0)$ de rayon d'un micromètre, entouré d'une fine membrane $\Omega_+^{*\varepsilon}$, de bord $\Gamma_+^{*\varepsilon}$, d'épaisseur de quelques nanomètres $\varepsilon > 0$.

Le potentiel électrique dans cette cellule vérifie le problème suivant

$$\left(P_{x,y}^{\varepsilon}\right)\begin{cases}(eq.1) & \Delta w_-^{\varepsilon}(x,y) = h_-(x,y) \text{ dans } \Omega_-^* \\ (eq.2) & \Delta w_+^{\varepsilon}(x,y) = h_+^{\varepsilon}(x,y) \text{ dans } \Omega_+^{*\varepsilon} \\ (t.c.) & w_-^{\varepsilon} = w_+^{\varepsilon}, \quad \mu_-\dfrac{\partial w_-^{\varepsilon}}{\partial n} = \mu_+\dfrac{\partial w_+^{\varepsilon}}{\partial n} \text{ sur } \Gamma^* \\ (g.c.) & \displaystyle\int_{\Gamma^*} w_-^{\varepsilon}(\sigma)\,d\sigma = \int_{\Gamma^*} w_+^{\varepsilon}(\sigma)\,d\sigma = 0 \\ (b.c.) & \dfrac{\partial w_+^{\varepsilon}}{\partial n} = l_+^{\varepsilon} \text{ sur } \Gamma_+^{*\varepsilon},\end{cases}$$

sous la condition de compatibilité

$$\int_{\Omega_-^*}(\mu_- h_-)(x,y)\,dxdy + \int_{\Omega_+^{*\varepsilon}}\left(\mu_+ h_+^{\varepsilon}\right)(x,y)\,dxdy + \int_{\Gamma_+^{*\varepsilon}} \mu_+ l_+^{\varepsilon}(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

où h_+^{ε} est pris, par exemple, dans $L^p\left(\Omega_+^{*\varepsilon}\right)$, et h_- dans $L^p\left(\Omega_-^*\right)$, $1 < p < \infty$.

Par un passage en coordonnées polaires puis des changements de variables évitant de travailler dans des espaces de Sobolev à poids, on obtient un problème de transmission posé sur deux cylindres $]-\infty,0[\times]-\pi,\pi[$ et $]0,\delta[\times]-\pi,\pi[$, (où $\delta = \ln(1+\varepsilon)$), que l'on peut écrire sous la forme opérationnelle suivante

$$\left(UP_t^{\delta}\right)\begin{cases}(eq.1) & \left(U_-^{\delta}\right)''(t) - 2\varpi\left(U_-^{\delta}\right)'(t) + \varpi^2 U_-^{\delta}(t) + AU_-^{\delta}(t) = G_-(t) \text{ sur } (-\infty,0) \\ (eq.2) & \left(U_+^{\delta}\right)''(t) - 2\varpi\left(U_+^{\delta}\right)'(t) + \varpi^2 U_+^{\delta}(t) + AU_+^{\delta}(t) = G_+^{\delta}(t) \text{ sur } (0,\delta) \\ (t.c.) & \begin{cases} U_-^{\delta}(0) = U_+^{\delta}(0) \\ \mu_-\left(U_-^{\delta}\right)'(0) - \mu_+\left(U_+^{\delta}\right)'(0) = \varpi(\mu_- - \mu_+)U_{\pm}^{\delta}(0)\end{cases} \\ (g.c.) & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} U_-^{\delta}(0)(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} U_+^{\delta}(0)(\theta)d\theta = 0 \\ (b.c.) & \left(U_+^{\delta}\right)'(\delta) - \varpi U_+^{\delta}(\delta) = F_+^{\delta},\end{cases}$$

avec la condition

$$\mu_-\int_{\Omega_-} e^{-\varpi t}G_-(t,\theta)\,dtd\theta + \mu_+\int_{\Omega_+^{\delta}} e^{-\varpi t}G_+^{\delta}(t,\theta)\,dtd\theta + \mu_+ e^{-\varpi\delta}\int_{-\pi}^{+\pi} F_+^{\delta}(\theta)\,d\theta = 0,$$

où $\varpi := -2 + 2/p$ est l'opposé du coefficient de Sobolev de $W^{2,p}\left(\Omega_{\pm}^{*\varepsilon}\right)$, $G_- \in L^p(-\infty,0;E)$, $G_+^{\delta} \in L^p(0,\delta;E)$, $1 < p < \infty$, $F_+^{\delta} \in E$ et $(A, D(A))$ est un opérateur linéaire fermé sur E, E étant un espace UMD (ici E est un sous-espace de $L^p(-\pi,\pi)$).

On étudie le problème $\left(UP_t^{\delta}\right)$ pour $\delta > 0$. On donne des résultats d'existence et d'unicité de la solution classique si F_+^{δ} est dans un espace d'intepolation entre $D(A)$ et E, en utilisant la théorie des semi-groupes, le calcul fonctionnel de Dunford et le Théorème de Dore-Venni.

On étudie aussi le retour au problème $\left(P_{x,y}^{\varepsilon}\right)$ et on montre l'unicité de la solution classique $w^{\varepsilon} = \begin{cases} w_-^{\varepsilon} \text{ sur } \Omega_-^* \\ w_+^{\varepsilon} \text{ sur } \Omega_+^{*\varepsilon}\end{cases}$ telle que $w_-^{\varepsilon} \in W^{2,p}\left(\Omega_-^*\right)$ et $w_+^{\varepsilon} \in W^{2,p}\left(\Omega_+^{*\varepsilon}\right)$ si l_+^{ε} est dans l'espace de Besov $B_p^{1-\frac{1}{p}}\left(\Gamma_+^{*\varepsilon}\right)$ et $p \neq 2$.

[1] Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre. Université du Havre, U.F.R. Sciences et Techniques, B.P. 540, 76058 Le Havre Cedex, France. Email : maelis.meisner@gmail.com.