Régularité précise des solutions de l'équation de Boltzmann homogène en espace dans le cas "non-cutoff" et maxwellien.

Léo GLANGETAS (LMRS)

7e journée de la Fédération Normandie-Mathématiques,
Le Havre, 12 juin 2015

Nous considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann homogène en espace, dans le cas "non-cutoff" et pour des molécules maxwelliennes

$$\begin{cases} \partial_t f(t,v) = Q(f,f)(t,v), \quad t>0,\, v\in\mathbb{R}^3, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Cette équation décrit l'évolution d'un gaz peu dense hors de l'équilibre. La fonction $f : [0,\infty[\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ est la distribution des particules et $Q(f,f)$ modélise leurs collisions. C'est un opérateur intégral qui, dans le cas maxwellien, est de la forme

$$Q(g,f)(v) \simeq \int_{v\in\mathbb{R}^3}\int_{\sigma\in\mathbb{S}^2} \frac{C}{|\theta|^{2+2s}}(g(v'_*)f(v') - g(v_*)f(v))dv_*d\sigma$$

où l'on a noté θ l'angle de déviation, v, v_* les vitesses pré-collisionnelles et v', v'_* les vitesses post-collisionnelles :

$$\cos\theta = \frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma, \;\; v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\sigma, \quad v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\sigma.$$

Le paramètre $0 < s < 1$ dépend du modèle physique étudié. Le cas dit "non-cutoff" est celui où la singularité en 0 du noyau de collision $|\theta|^{-2-s}$ n'est pas tronquée.

Nous étudions la régularité des solutions du problème de Cauchy pour une condition initiale f_0 proche d'une maxwellienne $\mu(v) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{|v|^2}{2}}$. Nous prouvons que pour tout temps strictement positif, les solutions proches d'une maxwellienne ont une régularité de type Gelfand-Shilov : plus précisément, elles ont la même régularité que les solutions de l'équation d'évolution associée à l'oscillateur harmonique fractionnaire :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,v) = \left(-\Delta_v + \frac{|v|^2}{4}\right)^s f(t,v), \quad t>0,\, v\in\mathbb{R}^3, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Nous étudions aussi le comportement précis des solutions en temps petit et la décroissance en temps long. La méthode utilisée est une décomposition spectrale dans la base des vecteurs propres (harmoniques sphériques) de l'opérateur associé à l'oscillateur harmonique. Nos montrons aussi que, dans le cadre utilisé, on peut résoudre l'équation de Boltzmann en résolvant un système infini d'équations différentielles ordinaires.

C'est un travail en collaboration avec Hao-Guang Li et Chao-Jiang Xu.