Convergence d'un schéma volumes finis vers la solution renormalisée d'un problème de convection-diffusion

Sarah LECLAVIER, LMRS, Université de Rouen.

Considérons le problème de convection-diffusion

$$\begin{aligned} -\Delta u + \operatorname{div}(\boldsymbol{v}u) + bu = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

avec Ω un ouvert borné (polygonal) de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, $\boldsymbol{v} \in L^p(\Omega)^d$ avec $2 < p < +\infty$ si $d = 2$ et $p = d$ si $d \geq 3$, $b \in L^2(\Omega)$, $b \geq 0$ et $f \in L^1(\Omega)$.

L'équation (1) présente deux principales difficultés, la donnée $f \in L^1$ d'une part et la non coercivité de l'opérateur $u \mapsto -\Delta u + \operatorname{div}(\boldsymbol{v}u) + bu$ d'autre part. L'existence et l'unicité d'une solution de (1) sont démontrées dans [3] avec la notion de dualité et dans [1] avec le cadre des solutions renormalisées.

Pour des problèmes similaires, la convergence des schémas volumes finis est étudiée dans [4] et [5]. Les auteurs y montrent que la solution du schéma converge vers une solution au sens des distributions. En particulier, ils démontrent une version discrète des estimations de type Boccardo-Gallouët (voir [2]), qui leur permet de passer à la limite.

Pour des données L^1 il est connu qu'en général la solution au sens des distributions n'est pas unique. Le cadre des solutions renormalisées (voir [6]) permet d'avoir des résultats de stabilité et d'unicité pour de nombreux problèmes elliptiques ou paraboliques à donnée L^1.

Dans ce travail nous démontrons que la solution du schéma converge vers la solution renormalisée de (1). L'originalité de ce résultat vient du fait que nous passons à la limite dans une version discrète renormalisée et que nous n'utilisons pas les estimations de type Boccardo-Gallouët.

Les principales difficultés sont de montrer l'équivalent discret de l'estimation sur l'énergie présente dans la définition de solution renormalisée et de gérer les termes résiduels qui apparaissent dans le passage à la limite. En effet, dans la version continue, une fonction test de type $h(u)\varphi$ avec h à support compact "tronque" l'équation (1) alors que dans la version discrète ce n'est pas le cas, ce qui complique et demande un contrôle d'extra termes inhabituels.

Références

[1] M. Ben Cheick et O. Guibé, *Résultats d'existence et d'unicité pour une classe de problèmes non linéaires et non coercifs*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 329 (11) (1999) 967-972.

[2] L. Boccardo and T. Gallouët, *On some nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal., 87:149-169, 1989.

[3] J. Droniou, *Solving convection-diffusion equations with mixed, Neumann and Fourier boundary conditions and measures as data, by a duality method*, Adv. Differential Equations, Volume 5 (10-12), p 1341-1396, 2000.

[4] J. Droniou, T. Gallouët et R. Herbin, *A finite volume scheme for a noncoercive elliptic equation with measure data*, SIAM J. Numer. Anal., 6:1997–2031, 2003.

[5] R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin, *Finite volume methods*, Handbook of Numerical Analysis, Vol VII, p. 713-1020. North Holland, 2000.

[6] F. Murat, *Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales*, Technical Report R93023, Laboratoire d'Analyse Numrique, Paris VI, 1993.

[7] S. Leclavier, *Convergence d'un schéma volumes finis vers la solution renormalisée d'un problème de convection-diffusion*, en préparation.

Sarah LECLAVIER, UMR 6085 CNRS - Université de Rouen.
`sarah.leclavier@etu.univ-rouen.fr`