

Un point de vue dynamique et probabiliste sur certaines fonctions arithmétiques

Thierry de la RUE (LMRS)

7e journée de la Fédération Normandie-Mathématiques,
Le Havre, 12 juin 2015

La fonction de Möbius est définie sur l'ensemble des entiers naturels strictement positifs. Sa valeur en n vaut 0 si n est divisible par le carré d'un nombre premier, 1 si n est le produit d'un nombre pair de nombre premiers distincts, -1 si n est le produit d'un nombre impair de nombre premiers distincts.

La fonction de Möbius et son carré, la fonction indicatrice des nombres entiers sans facteur carré, jouent un rôle important en théorie des nombres. Récemment, Peter Sarnak a envisagé leur étude sous un point de vue dynamique, en introduisant les systèmes dynamiques symboliques engendrés par ces deux fonctions : le *flot de Möbius* et le *flot des sans-carré*.

Dans cet exposé, je présenterai d'abord la généralisation du flot des sans-carré aux entiers dits *\mathcal{B} -libres*, c'est-à-dire aux entiers sans diviseur dans une famille \mathcal{B} d'entiers, 2 à 2 premiers entre eux, et dont la somme des inverses est finie. Des arguments probabilistes et de théorie ergodique permettent notamment d'expliciter la fréquence avec laquelle apparaissent les motifs de la fonction indicatrice des \mathcal{B} -libres, et de décrire complètement le système dynamique associé.

J'expliquerai enfin que la fonction de Möbius peut elle-même être généralisée à ce cadre \mathcal{B} -libre. Ce contexte élargi permet d'apporter un éclairage probabiliste nouveau sur une conjecture due à Chowla concernant la fonction de Möbius, et sur le caractère « apparemment aléatoire » de cette fonction.

Cet exposé est basé sur un travail effectué en collaboration avec El Houcein El Abdalaoui (Rouen) et Mariusz Lemańczyk (Toruń, Pologne).