Théorèmes limites en théorie ergodique,

exemples d'application

(Jean-Pierre Conze, université de Rennes 1)

Les deux théorèmes de base des Probabilités, loi forte des grands nombres (LFGN) et théorème central limite (TCL), ont leurs contreparties en théorie ergodique : à partir de 1931 avec le théorème de Birkhoff pour la LFGN et plus tard pour le TCL avec les travaux de Fortet et au début des années 60 ceux de Sinai sur le flot géodésique.

Depuis, le TCL et ses renforcements (théorème fonctionnel, théorème local) ont été obtenus dans de nombreuses situations de systèmes dynamiques. Contrairement au théorème ergodique ponctuel, ils ont un caractère "local" : ils nécessitent des hypothèses fortes sur les systèmes (hyperbolicité) et les observables (régularité) auxquels ils s'appliquent. Leur preuve est basée notamment sur des méthodes d'opérateurs avec trou spectral et des méthodes de martingales.

Ces théorèmes limites interagissent avec les domaines auxquels ils empruntent leurs modèles, tels que l'Analyse ou la Théorie des nombres. Nous en donnerons quelques exemples.

Un exemple célèbre est celui de la preuve "ergodique" donnée par Furstenberg en 1976 du théorème de Szemerédi sur l'existence de progressions arithmétiques de longueur arbitraire dans les suites d'entiers de densité positive.

En ce qui concerne le TCL et le théorème local, nous suivrons le fil conducteur d'un problème général pour les suites lacunaires d'entiers (n_k) : le comportement des sommes $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i n_k x}$. Nous donnerons un exemple d'énoncé de théorème limite local et son application à la question simple d'analyse suivante : densité dans $\mathbb{C}$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, de la suite $\{\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i 2^k x}, n \geq 1\}$.

Enfin, quelques résultats récents sur les théorèmes limites, notamment de D. Dolgopyat, seront évoqués.